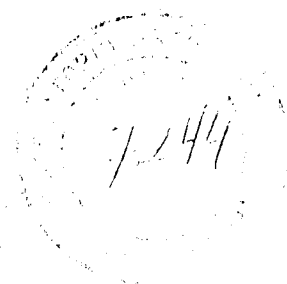


Tesis
M.A.

MODELOS SINTETICOS DE CUMULOS CON EFECTOS DE BINARIDAD Y ROTACION

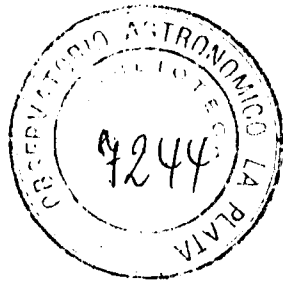
Tesis



Hugo Gustavo Marraco

LA PLATA

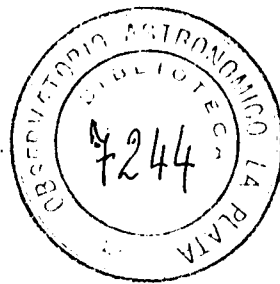
1975



12 MAY 1976

MODELOS SINTETICOS DE CUMULOS CON EFECTOS DE BINARIDAD Y ROTACION

Tesis presentada al Observatorio Astronómico y Escuela Superior de Astronomía y Geofísica de la Universidad Nacional de La Plata, como parte de los requisitos para optar al título de Doctor en Astronomía (Especialidad Astrfísica)



por

Hugo Gustavo Marraco

1975

Director de Tesis: Dr. Alejandro Feinstein

A MIS PADRES Y A SUSANA

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Alejandro Feinstein por su constante ayuda en todos los aspectos vinculados con este trabajo especialmente manteniendo despierto mi interés por el mismo.

Al Dr. Juan Carlos Muzzio y al Lic. Juan Carlos Forte por las numerosas discusiones vinculadas con el tema tratado.

A la Srta. Hebe Mosquera por la colaboración en la corrección del texto y el mecanografiado del mismo.

A los señores Enrique Sargiotti y Jorge Renzetti por el trabajo de laboratorio fotográfico correspondiente a las figuras.

Al señor Nemesio Corriols por la colaboración en el dibujo de las figuras.

A mi esposa Susana por su constante ayuda, tanto concreta como espiritual.

Al CESPI de la Universidad Nac. de La Plata por el uso de la computadora IBM /360 y la desinteresada ayuda de su personal.

A la Srta. Marfa Cristina Fanjul de Correbo por su asistencia en la preparación de tablas.

INDICE

	Página Nº
I. Introducción	1
II. La formulación de los modelos	2
1. Técnicas numéricas	
a. Generación de números al azar	3
b. Generación de números según distribuciones prefijadas	6
2. Relaciones funcionales	10
a. Función luminosidad	12
b. Relaciones entre los colores	17
3. Efectos intrínsecos	19
a. Rotación	19
b. Binaridad	26
c. Otros	36
4. Efectos extrínsecos	37
a. Extinción interestelar	37
b. Errores observacionales	39
III. Los observables	41
1. Diagramas color-magnitud y color-color	41
2. Estadística de los módulos de distancia	42
3. Estadística de los excesos de color	43
4. Estadística de los V sen i	45
IV. Resultados	46
V. Comparación con el cúmulo NGC2516	53
Referencias	57

I. INTRODUCCION

El problema de la dispersión intrínseca de los parámetros observados de las estrellas ha sido tratado frecuentemente en forma teórica. Entre los ejemplos de trabajos que predicen el ensanchamiento de la secuencia principal por los efectos de la rotación se pueden citar Faulkner, Roxburgh y Strittmatter (1968) y Hardorp y Strittmatter (1968).

Jaschek y Jaschek (1973) y Feinstein, Marraco y Mirabel (1973) realizaron intentos de separar observacionalmente las dispersiones intrínsecas (también llamadas cósmicas). Los primeros hallaron que para estrellas de tipo espectral B el índice de color U-B tiene una dispersión de $m_{0.032}$, mientras que para las de tipo A la dispersión en el B-V es $m_{0.015}$. Estos valores incluyen errores observacionales pero no la dispersión causada por las diferencias de absorción del polvo interestelar. Feinstein et al. (1973) hallaron que para estrellas de tipo B la dispersión a lo largo de la recta de enrojecimiento provocada por causas ajenas al mismo es aproximadamente $m_{0.028}$. Cuando se excluyen los efectos de los errores observacionales la dispersión alcanza sólo a $m_{0.023}$. En ambos trabajos se consideran únicamente estrellas de la secuencia principal.

Dado que actualmente se dispone de cálculos muy detallados de los efectos provocados por la rotación estelar en las magnitudes y los colores (Maeder y Peytremann, 1970 y 1972), se intenta en este trabajo reproducir las magnitudes y colores observados en cúmulos introduciendo, mediante un proceso de "Monte-Carlo", sucesivas causas de dispersión.

Como hipótesis de trabajo se suponen conocidas todas las causas de dispersión, de manera que, de no mediar su intervención, las estrellas se sucederían alineadas a lo largo de las relaciones que vinculan sus parámetros.

Los detalles de la construcción de los modelos se tratan en el capítulo II, en el capítulo III se enumeran y explican sus características observables, en el capítulo IV se muestran y discuten los resultados obtenidos que en el capítulo V son comparados con los observados en el cúmulo NGC 2516.

II. LA FORMULACION DE LOS MODELOS

Los modelos de este trabajo están representados por las características fotométricas de un grupo de estrellas. Las diferencias entre uno y otro modelo residen en la forma y en el grado en que le han sido adicionadas distintas causas de dispersión a lo largo de las secuencias naturales.

Durante la construcción de los modelos se presentan distintas situaciones en las cuales los valores se deben fijar solamente siguiendo a una determinada distribución. Es en éstas ocasiones que resulta necesario recurrir al Método de Monte-Carlo. En la sección II.1 se explican los detalles matemáticos necesarios para generar los valores al azar que se precisan para ponerlo en práctica.

Cada modelo se inicia creando un cúmulo de estrellas hipotético; este cúmulo tiene sus estrellas ordenadas según la masa y solamente una diferencia de ésta puede causar una ubicación distinta en los diagramas fotométricos. En este cúmulo hipotético no hay causa de dispersión en torno a las secuencias: todas las estrellas se ubican a lo largo de las relaciones funcionales que vinculan a los distintos parámetros físicos. La creación de este cúmulo se detalla en la sección II.2.

Las distintas causas que provocan la dispersión observada en los diagramas fotométricos han sido clasificadas en dos grupos según el ámbito en que se desarrolla su accionar: intrínsecas y extrínsecas.

Las causas intrínsecas son las que tienen lugar en las estrellas mismas y por esta misma razón están inevitablemente vinculadas unas a las otras, es decir que no son independientes entre sí. Los efectos intrínsecos de dispersión y sus influencias mutuas son tratados en la sección II.3.

Las causas de dispersión que no se manifiestan en las estrellas mismas son agrupadas aquí en la sección II.4 bajo la denominación de extrínsecas. Sin embargo, esta forma de agruparlas es solamente a los efectos de la exposición del problema ya que estas causas son totalmente independientes entre sí.

1. TECNICAS NUMERICAS

a. GENERACION DE NUMEROS AL AZAR

Con el propósito de introducir los distintos efectos que intervienen en I) la construcción de los modelos físicos de los cúmulos, y II) la simulación de su observación, se hace necesaria la introducción de valores numéricos estocásticos.

Para cada característica física se fijan las condiciones que ésta debe cumplir. Estas condiciones pueden clasificarse en a) las relaciones e interdependencias mutuas, b) las funciones distribución.

Las condiciones a) deben cumplirse estrictamente para cada estrella del modelo, en tanto que a las condiciones b) las debe cumplir el conjunto de estrellas que lo forman. Queda pues un grado de libertad que permite, siempre que el conjunto resulte distribuido adecuadamente, fijar los valores que toma una característica física en cada una de las estrellas.

Se necesita entonces un método para obtener números al azar que cumpla con las condiciones de poderlos obtener en gran cantidad y rápidamente.

Se utilizan comúnmente (Fröberg, 1969 p. 386) tres métodos a) el que emplea la parte media de un cuadrado, b) el que emplea los números de Fibonacci y c) el que emplea los residuos de potencias.

Generalmente se prefiere este último método (Barnett, 1962), llamado a veces "método multiplicativo congruente", porque cumple las condiciones mencionadas más arriba; en particular los números se pueden obtener en gran cantidad antes de que se repitan.

Los números así obtenidos son llamados "pseudo-al azar" ya que obedecen a una ley de formación, como se verá seguidamente.

El método c) de los residuos de potencias se puede explicar fácilmente si se define el operador mod tal que dados a y b enteros, $a \pmod{b}$ sea igual al residuo de la división de a por b *. Por ejemplo $17 \pmod{3} = 2$ ya que $17 = 3 \times 5 + 2$.

* Se dice residuo módulo b de a .

II.1.a

Resultan evidentes las siguientes propiedades: si $c \equiv a \pmod{b}$ entonces $(a-c) \pmod{b} = 0$; si $a < b$ entonces $a \pmod{b} = a$ y siempre $a \pmod{b} < b$.

Entonces dado un número entero inicial X_0 y la fórmula de recurrencia

$$(1) \quad X_{r+1} = X X_r \pmod{M}$$

con X y M enteros, los sucesivos X_r son los números "pseudo-al azar".

Tomemos un ejemplo con $X_0 = 1$, $M = 13$ y $X = 2$. La secuencia de los números resulta $\{X_r\} = 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7, 1, 2, \dots$ y desde allí en adelante los números se repiten cíclicamente. Se genera así una secuencia de $M-1=12$ números "pseudo-al azar" comprendidos entre 1 y dicho valor (Vazsonyi, 1970 p. 332).

Eligiendo convenientemente los valores de X y M es posible obtener secuencias muy largas de los X_r sin repeticiones. Una explicación sencilla de cómo deben ser elegidos se puede encontrar en Hamming (1962) p. 384.

Se define el operador "parte entera", simbolizado por \dagger , como aquel cuya aplicación a un número racional dado da como resultado el mayor entero que no lo supere. Ejemplo: $\dagger 2.371 = 2$. Este operador sólo es distributivo con respecto a la multiplicación dentro del campo de los números enteros.

Se puede expresar el operador \pmod en términos del operador parte entera de la siguiente manera

$$(2) \quad a \pmod{b} = a - b \dagger (a/b) ,$$

de esta forma la fórmula de recurrencia (1) queda expresada

$$(3) \quad X_{r+1} = X X_r - M \dagger (X X_r / M) .$$

Aplicándola nuevamente obtenemos

$$(4) \quad X_{r+2} = X^2 X_r - X M \dagger (X X_r / M) - M \dagger (X^2 X_r / M - X \dagger (X X_r / M)) ,$$

se observa que $X \dagger (X X_r / M)$ es entero, luego se lo puede retirar del corchete; simplificando los términos opuestos queda

$$(5) \quad X_{r+2} = X^2 X_r - M \dagger (X^2 X_r / M) ,$$

y repitiendo el proceso sucesivamente se obtiene

$$(6) \quad X_{r+n} = X^n X_r - M \dagger (X^n X_r / M) = X^n X_r \pmod{M} .$$

De manera que los números X_r son los residuos de las potencias de X lo cual justifica el

II.1.a

nombre del método.

En el caso aquí tratado los números "pseudo-al azar" deben ser generados por una computadora de numeración binaria. En ella los números enteros son codificados internamente en una "palabra" de 4 bytes cada uno de los cuales tiene 8 bits binarios. De esta forma, el mayor número entero (en valor absoluto) que puede codificarse es $2^{31} - 1$, ya que el primer bit de la palabra se emplea para el signo.

Por otro lado, una sencilla propiedad del operador mod se puede ver fácilmente con este ejemplo: $975346 \pmod{10^4} = 5346$. Resulta claro que tomar residuos de módulo γ^n de un número expresado en una numeración de base γ , equivale a separar las n últimas cifras de dicho número. En numeración binaria un ejemplo sería: $11011 \pmod{1000} = 11$ ya que $27 \pmod{2^3} = 3$.

Esta situación nos permite aprovechar la forma de trabajar de las computadoras digitales para calcular residuos de módulo γ^n donde γ es la base de la numeración y n la mayor cantidad de dígitos de esa base que es aceptada por la computadora. En efecto, cuando el resultado de una operación entre números enteros es mayor que $\gamma^n - 1$ la unidad de cómputo retiene los n dígitos menos significativos e ignora los restantes. Es decir que automáticamente los resultados de las operaciones entre enteros resultan residuos de módulo γ^n .

En una computadora binaria como la IBM/360 de la Universidad Nacional de La Plata, las operaciones entre enteros resultan residuos de módulo $2^{31} = 2147483648$. Esto indica también que los números "pseudo-al azar" que se obtienen están comprendidos entre 0 y 2^{31} . (Hamming, 1962 cap. 32; Barnett, 1962).

Para la generación de números "pseudo-al azar", se empleó en este trabajo una subrutina que usa el método de los residuos de potencias. La subrutina fue tomada del "Scientific Subroutine Package" (Fortran IV) IBM (1970) p. 77. Como el lenguaje en que se codificó el resto del programa es el PL/1, se pasó la subrutina a dicho lenguaje; las modificaciones importantes que fueron necesarias son a) impedir la señalación como error del exceso en la aritmética de números enteros que el PL/1 efectúa y el Fortran IV no. Esto se consiguió imponiendo la condición NOFIXEDOVERFLOW a la sentencia correspondiente. b) Usar variables enteras de palabra completa (4 bytes) ya que el PL/1, a menos que se las declare explícitamente, emplea media palabra (2 bytes).

b. GENERACION DE NUMEROS SEGUN DISTRIBUCIONES PREFIJADAS

La distribución más simple que se puede emplear es la llamada "rectangular". La expresión normalizada de esta distribución es

$$(1) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a < x < b \\ 0 & x < a; x > b \end{cases} .$$

Como se vio en el apartado II.1.a se dispone en este trabajo de valores "pseudo-azar" entre $a = 0$ y $b = 2^{31}$. Por razones de comodidad la mencionada subrutina divide dichos valores por 2^{31} , dando así números comprendidos entre $a = 0$ y $b = 1$.

Cuando se desea disponer de una distribución rectangular con a y b arbitrarios, se la obtiene a partir de la distribución con límites 0 y 1 de la siguiente forma.

Sea $\{x'_i\}$ un conjunto de números distribuido al azar entre 0 y 1 y sea $\{x_i\}$ un conjunto de números sujeto a la función distribución (1); entonces podemos obtener los x_i por medio de

$$(2) \quad x_i = (b-a)x'_i + a .$$

En efecto, cuando $x' = 0$ es $x = a$, y cuando $x' = 1$ es $x = b$, y siempre será $a \leq x \leq b$ ya que $0 \leq x' \leq 1$.

Cuando la distribución que deben cumplir los parámetros libres que se desean fijar es una función no constante, pueden igualmente generarse los números al azar dentro de la misma empleando alguno de los siguientes métodos.

- I) Método de la función distribución acumulativa.
- II) Método de rechazo.
- III) Métodos especiales.

En principio, el método I) es aplicable a cualquier distribución; en la práctica se verá que hay algunas limitaciones.

Sea $\phi(x)$ la función distribución que se desea que cumpla un conjunto $\{x_i\}$ de valores a fijar (Figura II.1.b.F1a).

Sea también otro conjunto $\{y_i\}$ de valores distribuidos según $\psi(y)$ con el cual se obtiene, a través de una relación funcional que vincula x e y , el conjunto $\{x_i\}$. Este último resulta con una función distribución $\Lambda(x)$ que debe cumplir la condición

$$(3) \quad \Lambda(x)dx = \psi(y)dy$$

de donde se obtiene

$$(3') \quad \Lambda(x) = \Psi(y) \frac{dy}{dx}$$

Para lograr ahora que $\Phi(x)$ sea igual a $\Lambda(x)$ es necesario hallar una relación funcional $y = \theta(x)$ tal que su derivada multiplicada por $\Psi(y) = \Psi(\theta(x))$ resulte igual a $\Phi(x)$. Este caso general tiene una solución sencilla cuando la distribución del conjunto $\{y_i\}$ es uniforme* dentro del dominio de θ^{-1} , ya que se utilizará la relación funcional en forma inversa. La solución está dada por la función distribución acumulativa (Figura 11.1.b.F1b)

$$(4) \quad y = \theta(x) = \int_{-\infty}^x \phi(z) dz,$$

de manera que

$$(4') \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\theta(x)}{dx} = \phi(x)$$

Al mismo tiempo el dominio de θ^{-1} resulta ser el intervalo $(0,1)$, ya que $\phi(x)$ es normalizada. La expresión de $\Psi(y)$ es entonces

$$(5) \quad \Psi(y) = \begin{cases} 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & y > 1; y < 0 \end{cases}$$

De esta manera reemplazando (4') y (5) en (3') obtenemos para el conjunto $\{x_i\}$ la distribución

$$(6) \quad \Lambda(x) = \Phi(x)$$

El procedimiento es entonces sencillo; se toman los elementos del conjunto $\{y_i\}$ y se los somete a la transformación

$$(7) \quad x_i = \theta^{-1}(y_i)$$

resultando el conjunto $\{x_i\}$ deseado.

El siguiente es un ejemplo sencillo que muestra el empleo del método recién expuesto: hallar la relación funcional que nos permite obtener un conjunto $\{x_i\}$ distribuido según (1) a partir de un conjunto $\{x_i^*\}$ distribuido según (5) (con $y = x_i^*$).

Se aplica la fórmula (4) para hallar

$$(8) \quad \theta(x) = \int_{-\infty}^x \phi(z) dz = \frac{1}{b-a} \int_a^x dz = \frac{x-a}{b-a}$$

* Distribución uniforme: aquella cuya función distribución es constante.

La relación buscada estará dada entonces por (7);

$$(9) \quad x = \theta^{-1}(x') = (b-a)x' + a$$

que coincide con la (2) dada anteriormente.

Como la distribución (5) es fácilmente obtenible, la única dificultad del método reside en disponer de la expresión (7) en forma analítica.

Un ejemplo al cual no es aplicable el método recién expuesto es el de la función distribución normal. Como la función distribución acumulativa no es expresable analíticamente, resulta imposible obtener su inversa sin emplear aproximaciones. Al tratar los métodos especiales se verá que es posible, mediante otras técnicas, obtener conjuntos de valores distribuidos normalmente.

También en teoría el método II) de rechazo es aplicable a cualquier distribución. Sin embargo, por razones prácticas sólo se lo puede emplear con éxito en aquellos casos en que se trabaje con una distribución válida dentro de un intervalo finito de la variable aleatoria. Se explica aquí un caso de este tipo. Con él quedarán en claro las limitaciones para aplicar el método a distribuciones que se extienden hasta infinito.

Sea $\phi(x)$ la función distribución que se quiere imponer al conjunto $\{x_i\}$ en el intervalo (a,b) , sea h el máximo valor que toma $\phi(x)$ en dicho intervalo.

Sean $\{x_i^*\}$ y $\{y_i\}$ conjuntos independientes de valores distribuidos uniformemente en los intervalos (a,b) y $(0,h)$ respectivamente.

Se procede entonces de la siguiente manera: se toma un par x_i^* , y_i y se controla la condición

$$(10) \quad y_i < \phi(x_i^*)$$

si dicha condición se cumple hacemos $x_i = x_i^*$; en caso contrario se rechaza el par de valores y se toma el siguiente para repetir el proceso nuevamente (Figura 11.1.b.F2a).

El conjunto $\{x_i\}$ obtenido como subconjunto del $\{x_i^*\}$ tal que se cumpla la condición (10), estará entonces distribuido según $\phi(x)$ en el intervalo (a,b) (Figura 11.1.b.F2b).

Como es imposible obtener un conjunto finito $\{x_i^*\}$ extendido uniformemente hasta $+\infty$ o $-\infty$, no se puede emplear el método antes expuesto para distribuciones cuyo intervalo de aplicación no es finito.

Se verá enseguida que la posibilidad de usar como aproximación un conjunto $\{x_i^*\}$

extendido, en valor absoluto, hasta valores muy grandes pero finitos, no es adecuada.

Las funciones distribución que se extienden hasta infinito toman forzosamente valores cada vez más pequeños a medida que se apartan de la región donde se halla la moda. Es fácil ver que la cantidad de rechazos que se deberá realizar resultará muy aumentada cuando se consideren estas zonas de la distribución en las cuales $\phi(x) \ll h$. Como el proceso de aceptación o rechazo de los valores toma el mismo tiempo de cálculo en la computadora, el hecho de que haya un porcentaje muy grande de rechazos puede tornar imposible el uso de este método en muchos casos, simplemente porque emplean tiempos prohibitivos de cómputo.

Entre los métodos III) colocamos todos los que aprovechan alguna particularidad de la distribución deseada con el fin de aproximarla. Vazsonyi (1970) trae una breve descripción de algunos métodos especiales como por ejemplo el que se emplea para la función β .

En este trabajo se empleó un método de aproximación para la función distribución normal (Hamming, 1962). Este método se vale de que, en el límite para $N \rightarrow \infty$, la distribución de las sumas de grupos de números distribuidos al azar, es la distribución normal.

La subrutina que realiza esta tarea fue tomada del "Scientific Subroutine Package" (Fortran IV) IBM (1970) p. 77, y emplea la suma de solamente 12 números distribuidos uniformemente entre 0 y 1. El resultado obtenido de esta suma, tras unas breves computaciones adicionales, es un número que sigue la distribución normal con valor medio cero y dispersión unitaria, pero está comprendido en el intervalo $(-6, 6)$. Una inspección a la tabla de la función normal acumulativa muestra que dicho intervalo deja afuera solamente 1 de cada 10^7 valores que se distribuyan normalmente.

Para obtener valores x_i distribuidos normalmente, pero con valor medio y dispersión arbitrarios, se somete al conjunto $\{x_i^!\}$ de valor medio cero y dispersión unitaria a la conversión

$$(11) \quad x_i = \sigma x_i^! + \langle x \rangle$$

2. RELACIONES FUNCIONALES

Dado lo difundido de su empleo, se eligió el sistema fotométrico UBV para simular las observaciones de los modelos de cúmulos galácticos.

En la tabla II.2.T1 se dan las longitudes de onda equivalentes y los anchos mitad para cada una de las bandas del sistema UBV. Los anchos mitad o semianchos, son las diferencias entre longitudes de onda en las cuales la sensibilidad es igual a la mitad de la sensibilidad pico de la banda. Las longitudes de onda efectivas de las bandas del sistema varían ligeramente para estrellas de diferente temperatura y con distintos excesos de color, pero esos efectos de segundo orden carecen de importancia en todas las simulaciones que aquí se hacen, con la posible excepción de los efectos del enrojecimiento interestelar que serán tratados en el apartado II.4.a.

En este sistema se emplea generalmente una magnitud aparente V , equivalente al m_V , y dos índices de color, el $B - V$, que aproxima al $m_{pg} - m_V$ con la salvedad de que el B no coincide exactamente con el m_{pg} ; y el $U - B$ que, a menos de los efectos de temperatura y enrojecimiento, es una medida de la discontinuidad de Balmer.

Como los modelos de los cúmulos son genéricos, en lugar de emplear la magnitud aparente V se emplea la magnitud absoluta M_V . Cada vez que sea necesario comparar el cúmulo sintetizado con uno observado, se fijará la distancia d a la cual se halla ubicado. Esta distancia vincula magnitudes absolutas con aparentes a través del módulo de distancia $V - M_V$ mediante la conocida relación

$$(1) \quad V - M_V = 5 \log d - 5$$

válida mientras no haya absorción interestelar.

Consecuentemente, se comienza cada modelo con la generación de un número predefinido de estrellas a las cuales se les asignan valores M_V , $B - V$ y $U - B$.

Se emplea para ello la siguiente hipótesis de trabajo: de no mediar los efectos tratados en las secciones II.3 y II.4, las relaciones entre la magnitud absoluta y los índices de color y la relación de los índices de color entre sí, serían continuas y no mostrarían "dispersión cósmica".

Dicho en otras palabras, si los efectos que se tabulan en las secciones II.3 y II.4

Tabla II.2.T1

Longitudes de Onda Equivalentes y Semianchos
de las Bandas del Sistema UBV (Becker, 1974)

Banda	Longitud de onda equivalente	Semiancho
U	3670 Å	550 Å
B	4430	970
V	5460	850

fueran iguales para todas las estrellas de un cúmulo; cualquier diferencia entre los valores UBV medidos de un par de estrellas del mismo se deberá únicamente a la diferencia de masas de ambas estrellas. Como la distribución de las masas en un cúmulo es continua, será continua la relación de la masa con la luminosidad y con la temperatura efectiva, y por consiguiente continuas las relaciones M_V , $B - V$; M_V , $U - B$ y $B - V$, $U - B$.

En todo lo que precede se ha considerado que todas las estrellas de un mismo cúmulo tienen la misma edad. Las posibles diferencias de edad entre los miembros de un cúmulo son consideradas aquí causa de dispersión y tratadas como tal en el apartado II.3.c.

Para la generación de las estrellas de un cúmulo sintético es necesario, entonces, conocer: la función distribución de las masas y las relaciones que vinculan la masa con la magnitud y con los índices de color observados.

Se procede en dos etapas. En la primera, para pasar de la función distribución de masas a la función luminosidad, se emplea la relación que vincula a la masa con la magnitud absoluta (relación masa-luminosidad). Esta etapa se trata en el primer apartado de esta sección. En la siguiente etapa, tratada en el segundo apartado, se obtienen los índices de color a partir de la magnitud absoluta visual empleando las relaciones tabuladas en la literatura para las estrellas de la secuencia principal.

a. FUNCION DE LUMINOSIDAD

Es necesario recordar que la función distribución de masas no es susceptible de ser observada directamente. Todas las determinaciones de esta distribución se hacen mediante el auxilio de la función de luminosidad y de la relación masa-luminosidad. Esta última es la que nos permite transformar una distribución en la otra y viceversa.

Con este fin aproximaremos la relación masa-luminosidad, cuando sea necesario, mediante la expresión (Jaschek, 1970)

$$(1) \quad M = M_{\odot} + \alpha \log m \quad 0 < M < 12$$

con

$$(2) \quad \alpha = -10$$

En esta y en las siguientes expresiones de este trabajo, se empleará la letra M para indicar la magnitud absoluta visual y m para indicar masas en unidades de la masa solar. Como, salvo indicación contraria, no se emplean magnitudes aparentes es imposible una confusión de notación.

La expresión (1) es una buena aproximación en el rango citado, y aceptable fuera de él, según puede verse en la figura 1 de Alexander (1968).

Como en los modelos de los cúmulos sólo se emplea la secuencia principal, es necesario considerar los límites superior (M_s) e inferior (M_i) entre los cuales habrá estrellas.

(La nomenclatura es según brillo; numericamente es $M_s < M_i$)

Estos límites en las magnitudes absolutas de las estrellas de la secuencia principal del cúmulo, están directamente relacionados con la edad que se adopte para el modelo.

Teniendo en cuenta que los cúmulos adecuados para la comparación con los modelos son aquellos que tienen reducido enrojecimiento diferencial, se confeccionó una lista de posibles candidatos. Resultó entonces que hay tres cúmulos de edades similares (5×10^7 años) que por su reducido enrojecimiento probablemente presenten muy poca diferencia de exceso de una estrella a otra. Estos cúmulos: α Persei, las Pléyades y NGC 2516, tienen a la vez una cantidad suficiente de miembros para facilitar las comparaciones estadísticas.

Tanto α Persei como las Pléyades (Reddish, 1965, figura 1), como NGC 2516 (Feinstein, Marraco y Mirabel, 1973) tienen el límite superior ubicado en la vecindad de

$M_5 = -2$ que se adoptó.

Probablemente el límite inferior no es observable más que en las Pléyades. Sin embargo, hay motivos para creer que no se ha dicho la última palabra acerca de esto (Iriarte, 1967).

Se conocen en cambio, aceptadas teorías que predicen la posición del límite inferior en la masa de las estrellas de la secuencia principal en función de la edad del cúmulo. Las estrellas de masas inferiores a la correspondiente al límite, se hallan aún en la etapa de contracción hacia la secuencia principal.

Es necesario, sin embargo, recordar aquí que las estrellas, en sus trayectorias contractivas previas a la secuencia principal, se desplazan con velocidades tales que las isocronas resultan paralelas a la secuencia principal de edad cero (ZAMS), como puede apreciarse en la figura 4 de Bodenheimer (1972).

Para los cúmulos mencionados, puede ocurrir entonces que, aunque las estrellas más débiles que magnitud absoluta visual 5 6 6 estén teóricamente aún en la etapa contractiva, las observaciones muestren una secuencia principal aparentemente normal. Tal es el caso de las Pléyades, discutido por Herbig (1962).

Queda entonces la posibilidad de fijar el límite inferior en base a consideraciones relativas a su posible influencia sobre algunas de las características observables que se tratan en el capítulo III.

Como se verá en dicho capítulo, las estadísticas empleadas se restringen a estrellas más brillantes que un límite dado. Las estrellas más débiles que dicho límite, influyen entonces sobre las características observadas, solamente si son incluidas como componentes secundarias de una estrella binaria cuya luminosidad total supere el límite. Los detalles de estas combinaciones de estrellas para formar binarias son tratados en el apartado 11.3.a. En base a ellos se eligió como límite inferior $M_i = 7$, de forma tal que los efectos omitidos al no incluir las posibles estrellas más débiles, sean despreciables al realizar las estadísticas del capítulo II.

Resulta evidente que la función de luminosidad determinada con observaciones en las inmediaciones del Sol, no es aplicable a un cúmulo de edad 5×10^7 años. Esto es debido a que en las cercanías del Sol existe una mezcla de distintas poblaciones; no todas las estrellas están en la secuencia principal y por supuesto no tienen la misma edad.

Cuando se corrige la función de luminosidad por los efectos de evolución estelar, se obtiene la llamada función de luminosidad inicial, que se simboliza generalmente por $\Phi(M)$ (Burbidge y Burbidge, 1958, § 54; Reddish, 1965, 3.1.1). Esta función de luminosidad inicial, originalmente concebida por Salpeter (1955), es aplicable solamente a las estrellas de la ZAMS.

Si se convierte la función de luminosidad inicial en la correspondiente función de masa, se tiene que dentro del intervalo $0.1 < m < 100$ ésta resulta dada por la expresión

$$(3) \quad F(m) = C m^{-s}$$

con

$$(4) \quad s \cong 2.35$$

(Reddish, 1965, p. 182).

Warner (1961) encuentra que dicho exponente sólo es aplicable en el intervalo $0.25 < m < 10$.

Existen razones teóricas para suponer que, dentro de un cierto rango, la formación de estrellas conduce a una distribución de las masas tal como la dada por (3), con el exponente indicado en (4); Reddish (1965) las relee en su sección 3.2.

Sin embargo, la función de luminosidad inicial tampoco es aplicable exactamente a un cúmulo galáctico, ya que la parte superior de la secuencia principal se halla evolucionada y no coincide con la ZAMS.

Justamente este efecto aparece en tres cúmulos, incluyendo a las Pléyades (Jaschek y Jaschek, 1957). La función de masa observada en dichos cúmulos emplea un exponente

$$(5) \quad s = 1.7$$

y es necesario corregir cada estrella por evolución para que sea aplicable el exponente dado por (4).

En la formulación de los modelos se empleó, consecuentemente, una función de masa dada por (3), pero con el exponente tomado de (5). El empleo se hizo a través de la función de luminosidad

$$(6) \quad \phi(M) = F(m) \frac{dm}{dM}$$

Para calcularla se despeja m en (1)

$$(7) \quad m = 10^{(M - M_0)/\alpha}$$

y se reemplaza en $F(m)$ por su expresión explícita, resultando

$$(8) \quad \phi(M) = C m^{-s} \frac{\ln 10}{\alpha} 10^{(M-M_0)/\alpha} = \frac{C \ln 10}{\alpha} 10^{(M-M_0)(1-s)/\alpha}$$

$$(8') \quad \phi(M) = C' 10^{(1-s)M/\alpha} = C' 10^{\beta M} \quad M_s < M < M_i$$

donde

$$(9) \quad \beta = (1-s)/\alpha \approx 0.07$$

Tomando los valores dados por (2) y (5) para α y s respectivamente, obtenemos para el valor numérico dado en (9).

Debe observarse que la dependencia en la magnitud absoluta es débil, ya que $10^{0.07} = 1.17$.

Si se desea normalizar esta distribución se lo puede hacer fácilmente mediante el auxilio de la función distribución acumulativa correspondiente

$$(10) \quad \theta(M) = \int_{-\infty}^M \phi(z) dz$$

Dado que $\phi(M)$ es nula fuera del intervalo $M_s < M < M_i$ resulta

$$(10') \quad \theta(M) = C' \int_{M_s}^M 10^{\beta z} dz = \frac{C'}{\beta \ln 10} (10^{\beta M} - 10^{\beta M_s})$$

Como la normalización implica que $\theta(M_i) = 1$, obtenemos de esta condición la expresión de C'

$$(11) \quad C' = \frac{\beta \ln 10}{10^{\beta M_i} - 10^{\beta M_s}}$$

Una inspección a las funciones de luminosidad observadas en algunos cúmulos galácticos por van der Bergh y Sher (1960), muestra la gran variedad de formas posibles que adopta la función de luminosidad, abarcando inclusive una distribución uniforme.

Por ello, y para no perder generalidad, se empleó, además de la mencionada anteriormente, una función de luminosidad constante dentro del intervalo de su definición. Esto es

$$(12) \quad \phi(M) = \begin{cases} 1/(M_i - M_s) & M_s < M < M_i \\ 0 & M < M_i \text{ ó } M < M_s \end{cases}$$

Esta función de luminosidad implica una función de masa dada por

$$(13) \quad F(m) = \phi(M) \frac{dM}{dm}$$

que podemos calcular con el auxilio de (1)

$$(13') \quad F(m) = \frac{\alpha}{(M_i - M_s) \ln 10} m^{-1} = C'' m^{-1} \quad m_i < m < m_s .$$

Esto significa que la relación (9), que vincula α , β y s se cumple aquí con $\beta = 0$ y $s = 1$.

b. RELACIONES ENTRE LOS COLORES

Una vez dadas las magnitudes absolutas visuales de cada una de las estrellas del modelo, se procede a obtener a partir de ellas los índices de color B-V y U-B.

Como los modelos constan solamente de estrellas en la secuencia principal, se empleó la relación entre los colores y la magnitud absoluta visual válida para la misma.

En lugar de usar los valores correspondientes a la secuencia principal de edad cero (ZAMS) se prefirió los correspondientes al tipo de luminosidad V de la clasificación MK. Esto es debido a que la pendiente de la secuencia principal V en el diagrama color-magnitud, es más asimilable a la de un cúmulo relativamente evolucionado, que la correspondiente a la ZAMS.

Tanto aquí como en otras partes de este trabajo se presenta la misma disyuntiva: si se dese interpolan algunas magnitudes tabuladas ¿cuál es la forma más sencilla de hacerlo en cuanto a tiempo y esfuerzo empleado? Las alternativas son a) interpolar mediante la fórmula adecuada entre los valores adyacentes de la tabla, b) obtener una fórmula interpolatoria y emplearla para calcular directamente los valores necesarios.

Si se emplea una computadora, el método a) adolece del siguiente defecto: se hace necesario leer la totalidad de la tabla, y luego programar una serie de decisiones para elegir los valores entre los cuales se interpolará. En cuanto al método b) el único inconveniente es la obtención previa de la fórmula interpolatoria.

En base a lo explicado se decidió en este caso, así como en otros a lo largo de este trabajo, obtener una fórmula interpolatoria que nos permita calcular el índice de color B-V en función de la magnitud absoluta visual M_V .

A los efectos que se detallarán en la sección III.2 no conviene aquí superar con la fórmula interpolatoria polinómica el grado 3. En efecto, debido a que luego se desea invertir el proceso y calcular M_V en función de B-V, conviene mantener bajo el grado del polinomio para facilitar así la búsqueda de la raíz. Si el polinomio interpolatorio es de grado 3, la raíz necesaria puede calcularse empleando las fórmulas de Cardano-Tartaglia, que son relativamente sencillas.

Para obtener la fórmula interpolatoria se empleó la relación M_V , B-V de Schmidt-Kaler (1965) tablas 1 y 3, para el tipo de luminosidad V.

Mediante un ajuste por el método de los cuadrados mínimos se obtuvo la siguiente fórmula válida para $M_s < M_v < M_i$

$$(1) \quad B-V = -0.000853 M_v^3 + 0.01572 M_v^2 + 0.0975 M_v - 0.117 \quad .$$

El apartamiento medio cuadrático* entre la fórmula (1) y los valores tabulados es $0^m.0204$.

Para la relación entre los índices de color $B - V$ y $U - B$, siempre de la secuencia principal, se prefirió la tabulación de Johnson (1966), tabla II. Dentro de los límites de precisión con que son conocidos, no hay distinción entre los índices de color del tipo de luminosidad V y los de la ZAMS.

Se obtuvo la siguiente fórmula interpolatoria válida para $-0.31 < B-V < 1.48$

$$(2) \quad \begin{aligned} U-B = & 3.465 (B-V)^6 - 12.09 (B-V)^5 + 10.76 (B-V)^4 + \\ & + 2.991 (B-V)^3 - 6.059 (B-V)^2 + 1.83 (B-V) - 0.06 \quad . \end{aligned}$$

El apartamiento medio cuadrático entre los $U - B$ tabulados y los dados por la expresión (2) es $0^m.0411$.

La elección del grado del polinomio fue hecha en base al apartamiento medio cuadrático. Como puede verse en la Tabla II.2.b.T1, que muestra el apartamiento cuadrático medio para los polinomios de distintos grados, se tomó el grado que minimizaba dicho valor sin aumentar desmedidamente el grado del polinomio.

Resumiendo: dada la magnitud absoluta visual de cada estrella (apartado II.2.a) se calculan el índice de color $B - V$ con la expresión (1) y luego el $U - B$ mediante la fórmula (2).

Tabla II.2.b.T1

Grado	Apartamiento medio cuadrático
1	0.2195
2	0.2221
3	0.1777
4	0.0676
5	0.0694
6	0.0411
7	0.0425
8	0.0547
9	0.0385
10	0.0444

* Apartamiento medio cuadrático: raíz cuadrada del cociente entre la sumatoria de los cuadrados de los apartamientos y la diferencia entre la cantidad de puntos y la cantidad de incógnitas.

3. EFECTOS INTRINSECOS

Entre los efectos que se producen en las mismas estrellas y que modifican la distribución espectral podemos contar los siguientes:

- a) efectos debidos a la rotación,
- b) efectos producidos por la combinación de estrellas para formar binarias,
- c) efectos debidos a la evolución,
- d) efectos debidos a la composición química.

Los apartados a, b y c de esta sección tratan los efectos a), b) y c)-d) respectivamente.

Estos efectos no son totalmente independientes entre sí, sino que, por el contrario, se influyen mutuamente. Las principales influencias mutuas se citan a continuación. La rotación de las estrellas componentes de binarias resulta modificada por los efectos gravitacionales de la compañera. A su vez, la evolución es influida por la rotación, la binaridad, y la composición química. En los apartados correspondientes se analizarán estas influencias mutuas.

a. EFECTOS DE ROTACION

Es conocido desde el trabajo pionero de Sweet y Roy (1953) que la rotación modifica a los brillos y las temperaturas superficiales de las estrellas.

Estas modificaciones influyen sobre las magnitudes y los índices de color observados. Es así que éstos dependen de la velocidad de la rotación y de la dirección desde la cual se observa la estrella. Por razones de simetría, este último aspecto es función únicamente del ángulo i entre el eje de rotación y la línea de la visual. Esto indica que estrellas que se ven "desde el polo" tienen el ángulo $i = 0^\circ$, en tanto que $i = 90^\circ$ indica que la dirección de la visual está contenida en el ecuador.

Se acepta actualmente que para las estrellas de la secuencia principal más tempranas que F5 la rotación es uniforme: toda la estrella gira como un cuerpo rígido. Por esta razón basta indicar la velocidad ecuatorial V para fijar completamente las condiciones del modelo.

Se emplean en este trabajo los cálculos para estrellas en rotación uniforme de Maeder y Peytremann (1970, 1972) (MP). Estos modelos fueron elegidos dado que, por ser los más recientes, incluyen los modelos de interiores en rotación de Faulkner, Roxburgh y Strittmatter (1968). Los modelos de interiores se emplean para calcular la variación de la luminosidad y el radio polar con la rotación.

Otros autores que también computaron los efectos de la rotación en el sistema UBV, (Roxburgh y Strittmatter, 1965; Collins, 1966; Hardorp y Strittmatter, 1968), usaron los modelos de interiores en rotación de Roxburgh, Griffith y Sweet (1965).

Con posterioridad a estos trabajos se encontró que los resultados de Roxburgh et al. (1965) eran erróneos (Sanderson, Connon Smith y Hazlehurst, 1970; Jackson, Sanderson, Connon Smith y Hazlehurst, 1971), en tanto que los de Faulkner et al. (1968) eran esencialmente correctos como lo prueba la comparación con cálculos similares publicados por Sackmann y Anand (1970).

Otra razón para elegir los resultados de MP es que incluyen los efectos de las líneas de absorción, tanto del hidrógeno como de los metales.

Finalmente, para tomar debida cuenta de los efectos de "blanketting" recién mencionados, estos autores integran el flujo emergente a través de las curvas de respuesta espectral del sistema UBV. Este método resulta más adecuado que tomar el flujo del continuo en alguna longitud de onda representativa, como se venía realizando hasta ese momento.

MP dan sus resultados en 3 modelos de masas 5, 2 y 1.4 m_{\odot} . Estas masas corresponden a magnitudes absolutas visuales $-1.^m_0$, $1.^m_2$ y $2.^m_4$ respectivamente. Los resultados de estos modelos fueron interpolados y ligeramente extrapolados en forma lineal para las estrellas de magnitudes absolutas comprendidas entre $-2.^m_0$ ($= M_3$) y $3.^m_6$. Este último límite corresponde a las estrellas de tipo F5V a partir de las cuales, hacia estrellas más tardías, la rotación es prácticamente inexistente (Slettebak, 1970).

Los resultados de MP fueron empleados en forma diferencial. Si A es alguna de las cantidades M_V , $B - V$ ó $U - B$, que son función de la velocidad ecuatorial V y de la inclinación i , se calcularon las diferencias con respecto a los valores sin rotación (el ángulo i no está definido en este último caso),

$$(1) \quad \delta A(V, i) = A(V, i) - A(0, -)$$

donde δA es la diferencia en M_V , $B - V$ ó $U - B$.

Estas diferencias $\delta A(V, i)$ fueron aproximadas usando fórmulas interpolatorias obtenidas mediante la técnica del ensayo y error.

Las fórmulas interpolatorias son las siguientes:

Para $5 m_{\odot}$

$$\delta M_V(V, i) = -0.574 \times 10^{-6} V^{2.25} + 0.155 \times 10^{-6} V^{2.5} \text{ sen}^{2.25} i$$

$$(2) \delta\{B-V\}(V, i) = 8.2 \times 10^{-8} V^{2.25} \text{ sen}^4 i$$

$$\delta\{U-B\}(V, i) = 9.0 \times 10^{-9} V^{2.5} + 9.6 \times 10^{-8} V^{2.25} \text{ sen}^4 i$$

Para $2 m_{\odot}$

$$\delta M_V(V, i) = -6.04 \times 10^{-6} V^{1.9} + 5.71 \times 10^{-8} V^{2.8} \text{ sen}^{2.8} i$$

$$\delta\{B-V\}(V, i) = 6.0 \times 10^{-8} V^2 + 0.152 \times 10^{-6} V^{2.25} \text{ sen}^{4.7} i$$

$$(3) \delta\{U-B\}(V, i) = 0.023 \exp(-a^2) + 0.0933 b \exp(-b^2) \text{ sen}^4 i$$

$$a = (V - 260)/130$$

$$b = (365 - V)/141$$

Para $1.41 m_{\odot}$

$$\delta M_V(V, i) = (-2.235 \times 10^{-7} + 5.17 \times 10^{-7} \text{ sen}^3 i) V^{2.5}$$

$$(4) \delta\{B-V\}(V, i) = -0.020 c \exp(-c^2) + 3.197 \times 10^{-6} V^{1.85} \text{ sen}^{5.5} i$$

$$\delta\{U-B\}(V, i) = 3.624 \times 10^{-12} V^4 + 0.050 c \exp(-c^2) \text{ sen}^{4.3} i$$

$$c = (V - 330)/110$$

En todas las fórmulas V está medida en km/s.

Antes de hacer referencia a la precisión de estas fórmulas conviene destacar lo siguiente. Existe un límite máximo para las velocidades ecuatoriales; este límite se presenta cuando, a lo largo del ecuador, la fuerza centrífuga iguala a la gravitatoria (igual módulo y dirección pero distinto sentido).

La rotación deforma a las estrellas abultando su ecuador, de forma tal que la situación recién expuesta corresponde también al valor máximo del radio ecuatorial que llamaremos R_{ec} .

Sin embargo la deformación de las zonas internas, donde se encuentra la mayor parte de la masa de la estrella es muy pequeña (Faulkner et al., 1968). De esta manera la atracción gravitatoria en la superficie todavía puede computarse como si toda la masa estuviera concentrada en un punto.

La superficie de la estrella será una equipotencial, conocida como superficie de Roche.

$$(5) \quad \Psi(R, \theta) = \text{cte}$$

donde Ψ es el potencial total, θ es la colatitud y R la distancia al centro de la estrella.

Este potencial total se descompone en una componente gravitatoria

$$(6) \quad \Psi_g(R) = Gm/R$$

y una componente centrífuga

$$(7) \quad \Psi_c(R, \theta) = \frac{1}{2} v^2 = \frac{\Omega^2 R^2 \text{sen}^2 \theta}{2}$$

donde Ω es la velocidad angular, constante para toda la estrella,

$$(8) \quad \Psi(R, \theta) = \Psi_g(R) + \Psi_c(R, \theta) = \text{cte}$$

En el polo ($\theta = 0^\circ$ y $R = R_p$) la componente centrífuga se anula y se tiene

$$(9) \quad \Psi(R_p, 0^\circ) = \Psi_g(R_p) = Gm/R_p = \text{cte}$$

Dado que (5) se cumple siempre resulta

$$(10) \quad \text{cte} = Gm/R_p = Gm/R + \frac{1}{2} \Omega^2 R^2 \text{sen}^2 \theta$$

que es la ecuación que regula la forma de la estrella en rotación. Esta ecuación tiene un parámetro libre: el radio polar R_p cuya variación con la velocidad de rotación se obtiene a través de los modelos de interiores antes mencionados. Podemos obtener ahora la máxima velocidad de rotación V_c (velocidad ecuatorial crítica) igualando la aceleración gravitatoria a la centrífuga a lo largo del ecuador. Allí y en el caso crítico ($R = R_{ec}$) se tiene la aceleración gravitatoria de (6)

$$(11) \quad \frac{\partial \Psi_g(R)}{\partial R} = -Gm/R_{ec}$$

y la aceleración centrífuga de (7) con $\theta = 90^\circ$

$$(12) \quad \frac{\partial \Psi_c(R, 90^\circ)}{\partial R} = \Omega_c^2 R_{ec}$$

Igualando los módulos y despejando obtenemos para $\Omega_c = V_c/R_{ec}$ la siguiente expresión

$$(13) \quad \Omega_c^2 = Gm/R_{ec}^2$$

Definimos aquí la velocidad angular normalizada

$$(14) \quad \omega = \Omega/\Omega_c$$

e introduciendo su valor en (10) obtenemos luego de multiplicar toda la expresión por R_{ec} ,

$$(15) \quad \frac{R_{ec}}{R_p(\omega)} = \frac{R_{ec}}{R(\omega, \theta)} + \frac{1}{2} \omega^2 \text{sen}^2 \theta \left(\frac{R(\omega, \theta)}{R_{ec}} \right)^2$$

Collins (1963) muestra (Fig. 1) las formas de los elipsoides gobernados por esta ecuación.

Curiosamente, esta expresión no nos permite calcular R_{pc}/R_{ec} haciendo $\omega = 1$ y $\theta = 0^\circ$; sino que resulta una identidad. En cambio, si hacemos $\omega = 1$ y $\theta = 90^\circ$ es $R(1, 90^\circ) = R_{ec}$ y $R_p(1) = R_{pc}$ quedando

$$(16) \quad R_{ec}/R_{pc} = 1.5$$

Las velocidades críticas pueden ser calculadas ahora a partir de (13)

$$(17) \quad v_c = \sqrt{Gm/R_{ec}}$$

Considerando que los radios polares varían muy poco y llamando $R_0 = R(\omega=0)$ el radio de la estrella sin rotación resulta

$$(18) \quad R_{ec} \approx 1.5 R_0$$

En la tabla 11.3.a.T1 se dan los datos correspondientes a los modelos de MP incluyendo la velocidad ecuatorial crítica calculada con las fórmulas (17) y (18).

Tabla 11.3.a.T1

Características de los modelos en rotación de MP.

masa	M_b^*	T_e^*	radio*	V_c	TE
m_\odot		$\approx K$	R_0	km/s	
5.01	-2.26	18000	2.566	498	B5V
2.00	1.44	9950	1.528	406	A1V
1.41	2.90	7675	1.311	369	A7V

*valor de la estrella sin rotación correspondiente

LLamando w a la relación entre la velocidad V y la velocidad crítica V_c

$$(19) \quad w = V/V_c$$

la relación entre w y ω está dada por

$$(20) \quad w = \omega R_e / R_{ec}$$

donde los valores para R_e/R_{ec} se calculan resolviendo la ecuación (15) con $\theta = 90^\circ$ para cada ω .

Alternativamente puede emplearse la fórmula interpolatoria dada por Collins (1963) para las soluciones de esa misma ecuación

11.3.a

$$(21) \quad R_e/R_p = 1.000 - .078 \omega + .341 \omega^2 - 1.672 \omega^3 + 1.910 \omega^{10}$$

En ambos casos, al resolver la expresión (15), y al calcular R_e con la (21), debe tenerse debida cuenta de la variación del radio polar adoptada por MP

$$(22) \quad R_p(\omega) = R_o(1 - d\omega^2)$$

con $d = 0.03$ para $5 m_{\odot}$ y $d = 0.024$ para 2 y $1.4 m_{\odot}$.

En el caso de emplear la (21) debe recordarse también la relación (16), resultando finalmente

$$(23) \quad w = \frac{\omega(1-d\omega^2)}{1.455} (R_e/R_p)(\omega)$$

Ahora se puede tratar el problema de la precisión de las fórmulas interpolatorias (2), (3) y (4). Suponiendo una distribución al azar de las ubicaciones de los ejes de rotación de las estrellas se puede ver fácilmente (Figura 11.3.a.F1) que la función distribución resultante para el ángulo i es

$$(24) \quad \Lambda(i) di \propto \sin i di$$

Para las velocidades rotacionales parece adecuada una distribución uniforme de ω en el rango $0 \leq \omega \leq 1$ para representar una población elegida al azar.

Con estas distribuciones para i y ω se calcularon las dispersiones causadas por la rotación en M_V , B-V y U-B de cada uno de los modelos de MP. Estas dispersiones están tabuladas en la primera parte de la tabla 11.3.a.T2. En esa misma tabla se incluyen los apartamientos cuadráticos medios entre los valores calculados por las fórmulas (2), (3) y (4) y los computados por MP.

Tabla 11.3.a.T2

Comparación de la dispersión causada por la rotación con la debida a la aproximación empleada

masa	dispersiones rotacionales en una población al azar			apartamientos cuadráticos medios de las fórmulas interpolatorias		
	M_V	B-V	U-B	M_V	B-V	U-B
$5 m_{\odot}$.076	.0065	.0261	.006	.0010	.0023
$2 m_{\odot}$.093	.0185	.0180	.018	.0033	.0019
$1.4 m_{\odot}$.126	.0365	.0113	.021	.0073	.0025

De la consulta de la tabla resulta que la dispersión introducida por las fórmulas interpolatorias es siempre despreciable frente a la provocada por la rotación misma, ya que al ser independientes, se las debe combinar sumando sus cuadrados.

Resta solamente el problema de la distribución de las variables V e i que se emplean en el cómputo de los efectos fotométricos de la rotación estelar de los modelos.

Para las inclinaciones se adoptaron cuatro casos: el ya mencionado, dado por la fórmula (24) y tres casos de coplanaridad. Para estos últimos se empleó una distribución normal con una dispersión

$$(25) \quad \sigma_i = 15^\circ$$

y los siguientes valores medios

$$(26) \quad \langle i \rangle = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$$

En todos los casos la distribución es restringida al intervalo $0^\circ \leq i \leq 90^\circ$

Para la distribución de las velocidades rotacionales se empleó primero la ya mencionada: uniforme en ω dentro del intervalo $(0, 1)$. También se probó luego con una distribución uniforme en w en el mismo intervalo. Las velocidades críticas, que fijan la escala de los ω y los w son tomadas de la tabla 11.3.a.T1, luego son calculados los δA con las fórmulas correspondientes a cada modelo. Finalmente el δA de cada estrella es interpolado linealmente entre los modelos adyacentes.

Las velocidades ecuatoriales de las estrellas con $M_V > 2.5$ fueron además sometidas al siguiente tratamiento: Si $M_V < 4.0$ fueron reducidas en un factor

$$(27) \quad F_r = (4.0 - M_V) / 2$$

que toma valores 1 y 0 respectivamente en $M_V = 2.5$ y 4.0 . Si $M_V > 4.0$ se adoptó

$$(28) \quad \omega = w = V = 0$$

Estos límites corresponden a los tipos espectrales A7V (2.4) y F7V (4.0).

En definitiva, las velocidades rotacionales quedaron restringidas al espacio comprendido entre la línea llena superior y el eje de las abscisas señalados en la figura 11.3.a.F3. Dentro de este espacio la distribución es uniforme cuando se emplea la función dada por la fórmula 11.1.b. (5) con $y = w$. En cambio cuando $y = \omega$ las velocidades se halla concentradas levemente hacia los valores más pequeños. En la misma figura se han señalado los valores de $\langle V \rangle$ tomados de la figura 3 de Bernacca y Perinotto (1974). Estos valores quedan aproximadamente a medio camino entre 0 y V_c .

b. EFECTOS DE BINARIDAD

Los efectos que se tratan en este apartado son los producidos por las estrellas binarias "no resueltas" ya que en aquellas en las que se distinguen las componentes se las trata a cada una por separado.

Para el caso de la fotometría UVB fotoeléctrica, la terminología "no resueltas" indica que la separación entre las componentes es menor que unos $5''$, que es el radio angular proyectado de los diafragmas usados normalmente para limitar la zona observada.

Si se observa un cúmulo galáctico situado a una distancia d del Sol, medida en pársecs, y a es la separación de las componentes medida en U A, entonces la expresión

$$(1) \quad \alpha = a/d$$

indica que una misma separación angular α , medida en segundos de arco, corresponde, según la distancia del cúmulo, a distintas separaciones.

Por ejemplo, los citados $5''$ corresponden a 2000 U A en NGC 2516, que está situado a unos 400 pc, en tanto que en las Pléyades, situadas a unos 125 pc, corresponden solamente a 600 U A.

Conviene recordar que la mayor parte de las estrellas binarias tienen el semieje mayor es decir el valor medio de su separación, menor que los valores más arriba citados (Heintz, 1969).

En este problema no se incluye el caso de las estrellas múltiples. Esto se justifica considerando que tales estrellas aparecen con muy poca frecuencia.

Efectivamente, para el caso más sencillo que es el de las estrellas triples, se distinguen dos configuraciones: cuando dos de las estrellas se hallan próximas y la tercera muy separada (configuración tipo I) y cuando las tres estrellas están a distancias comparables entre sí (configuración tipo II). Las estrellas triples de tipo I serán en la mayor parte de los casos observadas fotométricamente como una binaria no resuelta y una estrella próxima, en tanto que las de tipo II lo serán como triples no resueltas.

Aguekian (1974), pp. 294-306 trata este problema llegando a la conclusión de que los sistemas triples de configuración tipo II son inestables, con un tiempo medio de disgregación \bar{T} dado por

$$(2) \quad \bar{T} = \sqrt{a^3 / Gm} \times 95.6$$

11.3.b.

donde a es la dimensión media del sistema y m la masa de la estrella que escapa disgregando el sistema triple.

Calculando los valores de \bar{T} para los valores extremos de las masas empleadas ($m_s = 8 m_{\odot}$ y $m_i = 0.7 m_{\odot}$) combinadas con las separaciones mencionadas más arriba, se obtienen los resultados tabulados en la tabla 11.3.b.T1.

Tabla 11.3.b.T1

Tiempo medio de disgregación de sistemas triples de configuración II

	$8 m_{\odot}$	$0.7 m_{\odot}$
600 U A	7.9×10^4 años	2.8×10^5 años
2000 U A	4.7×10^5 años	1.6×10^6 años

Resulta claro que estos tiempos de disgregación son bastante menores que la edad (5×10^7 años) adoptada para los modelos.

Los efectos fotométricos que la adición de las intensidades luminosas de un par de estrellas produce en las magnitudes y en los colores, son fácilmente computables en forma exacta. Esto ha sido hecho con anterioridad por varios autores para diversas combinaciones de estrellas: Fernie y Roseburg (1961), Smak (1967), Maeder (1968, 1974). Los resultados han sido presentados siempre en forma de diagramas color-magnitud y color-color. Utilizando las fórmulas dadas más abajo se repitieron los cálculos para las combinaciones de estrellas posibles entre 27 tipos espectrales repartidos entre B2V y MOV. Los resultados coinciden en forma cualitativa y cuantitativa con los obtenidos por los autores más arriba mencionados.

Los cálculos se realizan fácilmente, tratando cada magnitud en forma independiente. Si los subíndices 1 y 2 se emplean para las componentes y las magnitudes sin subíndice corresponden a la doble no resuelta, la fórmula para M_V es

$$(3) \quad M_V = -2.5 \log(10^{-0.4M_{V1}} + 10^{-0.4M_{V2}})$$

y las correspondientes a los otros colores se obtienen reemplazando M_V por M_B y M_U .

En la construcción de los modelos se consideraron diversas fracciones de estrellas binarias no resueltas. Como veremos luego, la fracción de estrellas de este tipo bien puede no resultar constante a lo largo de la secuencia principal.

Antes de explicar el sencillo procedimiento que se emplea para generar las estrellas binarias veremos cómo se elige la diferencia de magnitudes

$$(4) \quad \Delta m = M_2 - M_1 \quad M_2 > M_1$$

11.3.b.

o bien el correspondiente cociente de masas

$$(5) \quad \mu = m_2/m_1 \quad m_2 < m_1$$

de cada una de las binarias.

Para realizar esta tarea es necesario conocer la función distribución de razones de masa $f(\mu)$.

Para esta función se han propuesto diversas expresiones basadas en consideraciones teóricas y observacionales.

Definiendo

$$(6) \quad \lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\mu}{1 + \mu} \quad 0 \leq \lambda \leq 0.5$$

Kuiper (1935) encuentra empíricamente que las observaciones pueden ser representadas por

$$(7) \quad f(\lambda) = 2$$

resultando para $f(\mu)$

$$(8) \quad f(\mu) = 2/(1 + \mu)^2$$

Heintz (1969) propone la siguiente fórmula interpolatoria

$$(9) \quad f(\lambda) = \frac{16}{\pi} \sqrt{\lambda(1-\lambda)}$$

que para $f(\mu)$ resulta

$$(10) \quad f(\mu) = \frac{16}{\pi} \sqrt{\mu(1+\mu)^3}$$

Warner (1961) favorece una ley de formación de las binarias en la que ambas componentes se toman al azar dentro de la población de estrellas simples. Conocida la función de masa de las estrellas componentes, que Warner toma como m^{-S} (ver 11.2.a. (3)), se puede derivar la función distribución de los μ .

Esta derivación se hace sin tener en cuenta ningún límite para m y resulta

$$(13) \quad f(\mu) = C \mu^{-S}$$

Jaschek (1971) y Jaschek y Ferrer (1972), empleando estadísticas de binarias espectroscópicas, ensayan varias distribuciones, incluyendo la (11) y además una distribución constante,

$$(12) \quad f(\mu) = 1/(1 - \mu_\ell) \quad \mu_\ell \leq \mu \leq 1$$

pero siempre considerando un límite inferior μ_ℓ . Este límite inferior es necesario ya que forzosamente no se puede admitir un número finito de binarias con $\mu \rightarrow 0$. Naturalmente, lo que sucede es que hay una masa máxima y otra mínima para las estrellas de la secuencia

11.3.b.

principal como se vio en el apartado 11.2.a., resultando

$$(13) \quad \mu_l = m_i / m_s$$

Heintz (1969) también menciona la formación de pares a partir de estrellas tomadas al azar, pero adopta un límite inferior para la expresión 11.2.a. (3) obteniendo así su distribución III.

$$(14) \quad f(\lambda) = c\lambda^{s-2}(1-\lambda)^{-s}$$

que expresada en términos de μ resulta

$$(15) \quad f(\mu) = (s-1)\mu^{s-2}$$

Para el caso tratado en este trabajo se deben considerar los límites superior e inferior de la función de masa. Siguiendo los lineamientos de Warner se tendrá

$$(16) \quad f(m_1, m_2) dm_1 dm_2 = F(m_1)F(m_2) dm_1 dm_2,$$

de donde

$$(16') \quad f(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(m_1)F(\mu m_1) m_1 dm_1$$

Se emplea ahora la expresión 11.2.a. (3) para $F(m)$ válida para $m_i \leq m \leq m_s$ de la cual se desprende que deberá ser también

$$(17) \quad m_i \leq \mu m \leq m_s$$

es decir

$$(17') \quad m_i / \mu \leq m \leq m_s / \mu$$

recordando que la función de masa es nula fuera de los intervalos mencionados, se pueden tomar ahora los límites superior e inferior de la integral (16') como

$$(18) \quad \min(m_s / \mu, m_s)$$

y

$$(19) \quad \max(m_i, m_i / \mu)$$

respectivamente. Dado que $\mu \leq 1$ tendremos

$$(20) \quad f(\mu) \propto \int_{m_i / \mu}^{m_s} \mu^{-s} m^{1-2s} dm,$$

integrando

$$(21) \quad f(\mu) \propto \mu^{s-2} m_i^{2-2s} - \mu^{-s} m_s^{2-2s}$$

Utilizando el límite inferior dado en (13) obtenemos una expresión definitiva para la distribución

$$(22) \quad f(\mu) \propto \mu^{s-2} - \mu_l^{2s-2} \mu^{-s}$$

11.3.b.

Se ve que cuando $m_s \rightarrow \infty$, como en el caso de Heintz, se obtiene la expresión (15).

La fórmula (22) da la distribución de μ en el intervalo $(\mu_l, 1)$ pero no es necesario truncar la expresión artificialmente en el límite inferior, ya que $f(\mu_l) = 0$.

Debe destacarse que en ningún caso es posible obtener una expresión finita para $f(\mu)$ si no se adopta un límite inferior m_i para $F(m)$. Esto se pone en evidencia cuando se quiere repetir el cálculo de Warner haciendo $m_2 = m_1/\mu$ integrando sobre m_2 sin límites. Por el contrario, cuando se repite el procedimiento que parte de la (16) para llegar a la (22) integrando sobre m_2 surge exactamente el mismo resultado, es decir la distribución (22).

En la figura 11.3.b.F1 se representan simultáneamente las distribuciones $f(\mu)$ dadas por las expresiones (8), (10), (11) + (13), (15) y (22). Para la (13) y la (22) se tomó

$$(23) \quad \mu_l = \frac{m_i}{m_s} = \frac{0.7}{8} \approx 0.1$$

correspondiente a los límites de la secuencia principal adoptados en este trabajo. Todas las distribuciones están normalizadas y cuando fue necesario se empleó $s = 2.35$, excepto en la expresión (22) que se representó, además, para $s = 1.7$.

Empleando la relación masa-luminosidad tal como fue aproximada en el apartado 11.2.a

$$11.2.a.(1) \quad M = M_0 + \alpha \log m \quad \alpha = -10$$

se pueden convertir las relaciones de masa μ en las diferencias de magnitud definidas en la expresión (5):

$$(23) \quad \Delta m = M_2 - M_1 = \alpha \log \frac{m_2}{m_1} = \alpha \log \mu$$

De esta forma es posible obtener las funciones distribución de los Δm a partir de las $f(\mu)$ dadas

$$(24) \quad \phi(\Delta m) = f(\mu) \frac{d\mu}{d\Delta m} = f(\mu) \frac{\ln 10}{\alpha} 10^{\Delta m/\alpha}$$

En la tabla 11.3.b.T2 se comparan las distribuciones $\phi(\Delta m)$ integradas sobre intervalos de 1^m desde 0^m a 7^m . En la misma tabla se dan los resultados observacionales obtenidos por Kuiper (1935) y Hynek (1967) que han sido corregidos por diversos efectos observacionales.

De la comparación se decidió, finalmente, obtener las binarias no resueltas tomando las componentes al azar. Para ello se procede como se detalla a continuación.

Si se desea obtener n estrellas en total, de las cuales una fracción p serán binarias no resueltas, se generarán $n(1+p)$ estrellas simples; de éstas $n(1-p)$ serán definitivamente simples en tanto que las restantes $2pn$ estrellas se combinan de a pares para formar binarias.

Resulta importante aclarar los siguientes puntos. Las modificaciones debidas a la rotación y tratadas en el apartado 11.3.a. se calculan y aplican antes de combinar las estrellas de a pares. Esta combinación se efectúa de la siguiente forma: la estrella m con la $m + np$ para $1 \leq m \leq np$. Esto último se hace para asegurar que las combinaciones sean estrictamente al azar.

Inmediatamente después de comenzar las primeras computaciones con varias fracciones de binarias, construídas como se explicó más arriba, resultó evidente el siguiente efecto. Cuando se toma como función distribución de las estrellas simples la expresión 11.2.a. (12), es decir constante dentro del intervalo de definición, la función de luminosidad que se obtiene luego de producir la fracción p de estrellas binarias resulta decreciente.

En efecto, cuando se combina un par de estrellas para formar una binaria no resuelta, la magnitud de ésta resulta menor que la de la componente más brillante. De esta forma las binarias no resueltas se acumulan en la zona "brillante" de la distribución, desbalanceando la función de luminosidad resultante hacia las magnitudes menores a medida que la fracción p de binarias aumenta. Este efecto se produce cualquiera sea la distribución en magnitudes de las estrellas simples, pero es más fácil hallarlo justamente en el caso mencionado porque resulta muy evidente.

Conociendo la función de luminosidad final $\Phi(M)$ que se obtiene luego que una fracción p de estrellas se forma a partir de una distribución de estrellas simples, y una fracción $1 - p$ es tomada directamente de esta última, entonces se puede plantear la condición que debe cumplir la citada distribución de las magnitudes de las estrellas simples que se designará $\Phi_S(M)$.

Antes es necesario conocer cómo se obtiene la distribución de las magnitudes de las estrellas dobles $\Phi_d(M)$ formadas a partir de las simples como se explicó más arriba. Con este propósito se puede aproximar la fórmula (3) mediante la expresión

$$(25) \quad M = \min(M_1, M_2)$$

con un error que no supera 0.075 .

Si, como ya se aclaró, las estrellas se toman al azar y no hay diferencias estadísticas entre las componentes, resulta

$$(26) \quad \Phi_d(M) = 2\Phi_S(M) \int_M^{\infty} \Phi_S(z) dz$$

Ahora ya se puede plantear la ecuación integral que fija $\Phi_S(M)$ conocida la función de luminosidad $\Phi(M)$ del conjunto resultante:

$$(27) \quad \begin{aligned} \Phi(M) &= (1-p)\Phi_S(M) + p\Phi_d(M) = \\ &= (1-p)\Phi_S(M) + 2p\Phi_S(M) \int_M^{\infty} \Phi_S(z) dz \end{aligned}$$

factorizando resulta finalmente

$$(27') \quad \Phi(M) = \Phi_S(M) \left\{ 1 + p - 2p \int_{-\infty}^M \Phi_S(z) dz \right\}$$

Introduciendo la función distribución acumulativa

$$(28) \quad F_S(M) = \int_{-\infty}^M \Phi_S(z) dz$$

de donde

$$(29) \quad \frac{dF_S(M)}{dM} = \Phi_S(M)$$

queda finalmente para (27')

$$(30) \quad \Phi(M) = \frac{dF_S(M)}{dM} \{ 1 + p - 2pF_S(M) \}$$

que luego de formar diferenciales enteros y agrupar queda

$$(31) \quad (1 + p)dF_S(M) - p dF_S^2(M) - \Phi(M)dM = 0$$

Integrando entre $-\infty$ y M se obtiene

$$(32) \quad pF_S^2(M) - (1 + p)F_S(M) + \int_{-\infty}^M \Phi(z) dz = 0$$

de donde la solución general para $F_S(m)$ es

$$(33) \quad F_S(M) = \frac{1 + p - \sqrt{(1 + p)^2 - 4p \int_{-\infty}^M \Phi(z) dz}}{2p}$$

y para $\Phi_S(M)$

$$(34) \quad \Phi_S(M) = \frac{\Phi(M)}{\sqrt{(1 + p)^2 - 4p \int_{-\infty}^M \Phi(z) dz}}$$

Recordando la definición dada en 11.2.a. (10) queda

$$(34') \quad \Phi_S(M) = \frac{\Phi(M)}{\sqrt{(1 + p)^2 - 4p\Theta(M)}}$$

Para el caso $f(m) \propto m^{-S}$ la expresión de $\Theta(M)$ viene dada por 11.2.a. (10'), (11) y

(9), en tanto que si $\Phi(M)$ es uniforme (11.2.a. (12)) la expresión es

$$(35) \quad \Theta(M) = \frac{M - M_S}{M_i - M_S} \quad M_S \leq M \leq M_i$$

Como hay razones teóricas (Reddish, 1965) que indican que la función de masa es del tipo m^{-S} , se puede tratar de aproximar $\Phi_S(M)$ por una expresión del tipo $10^{\beta' M}$ Mediante experimentos numéricos se encuentra que

$$(36) \quad \Delta\beta = \beta' - \beta \approx 0.09 \log \frac{1+p}{1-p}$$

lo cual corresponde a un cambio del exponente de la función de masa

$$(37) \quad \Delta s = s' - s = -\alpha(\beta' - \beta) = 0.9 \log \frac{1+p}{1-p}$$

Esta representación da una dispersión en el $\log \phi_s(M)$ que no supera 0.15 para $p < 0.7$.

Este resultado permite, dados los errores con que se obtiene el exponente s , explicar algunos resultados observacionales. Los Δm de las estrellas de campo obtenidos por las observaciones de Kuiper y Hynek muestran acuerdo con la teoría de combinación al azar cuando el exponente s' es $s' \approx 1.7$ ($\beta' \approx 0.07$), o como menciona Heintz (1969) para su distribución sin límite μ_ℓ

para $1.3 \leq s \leq 1.5$. Una fracción de binarias entre 0.4 y 0.8 permitiría en este caso explicar funciones de luminosidad constantes $\beta \approx 0$ ($s \approx 1$) como las halladas en varios cúmulos abiertos. Por otro lado, la diferencia entre la teoría que predice $s \approx 2.35$ y la observación que muestra $s \approx 1.7$ encontrada por Jaschek y Jaschek (1957), puede también explicarse mediante un porcentaje adecuado de binarias ($p = 0.7$).

Para obtener las funciones de luminosidad mencionadas en el apartado 11.2.a se procedió como se detalla a continuación.

Cuando se desea que $\phi(M)$ venga dada por 11.2.a.(12) se debe distribuir a las estrellas simples según las expresiones (34') y (35). Usando la inversa de la función distribución acumulativa (33) para obtener la distribución deseada, según se detalló en el apartado 11.1.b, resulta

$$(38) \quad M = (M_i - M_s) \{(1+p)y - py^2\} + M_s$$

Entonces, si y es un valor distribuido uniformemente entre 0 y 1, el resultado de (38) quedará distribuido según $\phi_s(M)$ en el intervalo $M_s \leq M \leq M_i$.

En cambio, para obtener una función de luminosidad correspondiente a la función de masa $F(m) \propto m^{-s}$ con $s \approx 1.7$ (11.2.a.(3) y (5)), se prefirió usar una expresión de la forma 11.2.a.(8') pero con β' en el exponente dada según (36) para cada fracción de binarias. Tomando la función distribución acumulativa de 11.2.a.(10') y (11) resulta para M

$$(39) \quad M = \frac{1}{\beta'} \log \{y(10^{\beta' M_i} - 10^{\beta' M_s}) - 10^{\beta' M_i}\}$$

donde

$$(40) \quad \beta' = 0.07 + 0.09 \log \frac{1+p}{1-p}$$

Resta ahora tratar el problema de la influencia gravitatoria mutua de las componentes de las binarias. Para ello se emplearon los resultados del reciente trabajo de Levato (1974). Un resumen de los mismos se expone a continuación.

a) Existe correlación entre los V en i de las componentes de las binarias visuales.

b) Entre las binarias cerradas hay muchos casos de sincronización. *

c) Las componentes de los sistemas binarios rotan más lentamente que las estrellas simples.

Este efecto es máximo para las binarias cerradas en las que la velocidad de rotación promedio es 20 al 25% de V_c .

d) El grado de sincronización no depende de las dimensiones relativas del sistema R/a , donde a es el semieje mayor del sistema.

e) Los sistemas no sincronizados tienen generalmente una relación de masas μ pequeña, o son casos de binarias con intercambio de masa.

De estos resultados se pueden extraer las siguientes conclusiones.

El resultado a) indica, tal como lo hace la teoría, que las estrellas binarias tienen ejes de rotación paralelos. Es así que se forzaron los ángulos i de proyección para que sean los mismos para ambas componentes de cada sistema binario.

Del resultado b) es posible concluir que para las binarias "no resueltas" de este trabajo la influencia gravitatoria mutua es grande, lo cual produce una convergencia de las velocidades de rotación hacia los valores dados en c). Esta tendencia, a su vez, es independiente de las separaciones relativas, como lo atestigua el resultado d). Aparentemente, si de algo depende la tendencia a la sincronización, es de la relación de masas, siendo mayor para el caso de las masas iguales. Esto último es confirmado por el resultado e). Teniendo esto en cuenta, las velocidades V' de las componentes de las binarias, fueron asignadas en la misma forma que las de las estrellas simples y luego, para cada componente, se obtuvo la velocidad resultante V .

$$1) \quad V = (1 - \mu)V' + \mu 0.2 V_c$$

donde μ es calculado en función de las magnitudes absolutas M_1 y M_2 de las componentes

$$2) \quad \mu = 10 \frac{|M_1 - M_2|}{\alpha}$$

donde la pendiente α de la relación período-luminosidad fue tomada de 11.2.a.(11).

El tratamiento dado a la influencia gravitatoria mutua en las estrellas binarias es quizás la menos fundamentada de todas las suposiciones que fueron tomadas en este apartado, pero hasta el momento no se dispone de otros elementos de juicio para mejorar este aspecto.

* Sincronización: velocidad angular de rotación y translación iguales, como la Luna con la Tierra.

Comparación de las diferencias de magnitud Δm predichas con la observación

Δm	Kuiper * (1935)	Hynek (1967)	(8)	(10)	(11) + (13) $s = 2.35$	(15) $s = 2.35$	(22) $s = 2.35$	(22) $s = 1.7$	(12)
0m	.21	.226	.115	.145	.017	.267	.292	.221	.228
1m	.14	.142	.111	.140	.023	.196	.213	.185	.182
2m	.20	.125	.106	.130	.032	.143	.156	.154	.144
3m	.16	.108	.098	.116	.043	.106	.113	.125	.115
4m	.11	.105	.089	.099	.059	.077	.082	.102	.092
5m	.08	.078	.079	.084	.081	.056	.058	.080	.072
6m	.10	.084	.069	.068	.110	.041	.040	.060	.057
7m	**	.132	.151	.129	.635	.069	.046	.074	.111
10m	**	**	.182	.090	.000 ***	.045	.000 ***	.000 ***	.000 **

* Tomado de Jaschek (1970)

** Rango no observado

*** Se tomó $\mu_\ell = 0.1$, lo que implica un Δm máximo de 10m.

c. OTROS EFECTOS

Los efectos debidos a las posibles diferencias de edad entre las estrellas componentes de un mismo cúmulo han sido tratados con una técnica similar a la de este trabajo por Schlesinger (1972). Este autor construye modelos de cúmulos galácticos en los cuales, para cada estrella, la evolución es tratada en forma individual. En dichos modelos el instante de formación de las estrellas es tomado al azar dentro de un intervalo de 15×10^6 años. Las edades promedio de los modelos que más se asemejan a la edad de los del presente trabajo son 2.25×10^7 años (A1) y 7×10^7 años (B1). Estos modelos, representados en la figura 1 del trabajo citado, muestran que la dispersión de la secuencia principal es máxima en su extremo superior y se anula totalmente 2 a 3 magnitudes por debajo según la edad del mismo. De acuerdo con Schlesinger la dispersión en el B - V del modelo A1 es de 0^m03 en el tope de la secuencia, disminuyendo a 0^m01 cuando se la toma 2^m por debajo. En el modelo B1 la dispersión es "algo mayor" que 0^m01 en la parte superior de la secuencia principal; no se aclaran más detalles sobre este modelo, pero una inspección a la figura donde se lo representa muestra que desaparece 2^m por debajo del extremo superior de la secuencia.

En el presente trabajo no se hicieron entrar los efectos de la edad variable de las estrellas de los cúmulos, pero lo expuesto anteriormente muestra que este problema podría manifestarse únicamente en el extremo superior de la secuencia principal. Será necesario tener en cuenta esta situación para una adecuada comparación de los resultados de este trabajo con los cúmulos observados.

Otro efecto susceptible de producir dispersión entre las magnitudes y colores observados de las estrellas de un cúmulo es provocado por las posibles diferencias de composición química.

Diferencias de abundancia de metales producen alteraciones en el efecto de "blanketing" los cuales pueden ser notables en la banda U de la fotometría UBV. Afortunadamente las estrellas de un mismo cúmulo se han formado conjuntamente minimizando las posibilidades de diferencias en la composición química.

La aparición de las estrellas A metálicas, causada por fenómenos ajenos a su primitiva composición química (Abt, 1967), ocurre con una frecuencia apreciable recién en cúmulos de edades mayores que la de los modelos empleados en este trabajo (Jaschek y Jaschek, 1967).

Esto último, sumado al hecho de que la incidencia nunca supera un porcentaje mínimo, es la razón por la cual se decidió no incluir este tipo de dispersión en los modelos.

Otras posibles causas de dispersión, como la presencia de estrellas Be con exceso ultravioleta, no fueron incluidas por la misma razón: solamente es afectado un pequeño porcentaje de las estrellas más tempranas del cúmulo.

4. EFECTOS EXTRINSECOS

Se incluyen en esta sección las dos causas de dispersión provocadas por fenómenos ajenos a las estrellas mismas.

Por su misma naturaleza, es decir por no estar vinculada su acción a la estrella observada, estos fenómenos son totalmente independientes entre sí. Esto asegura que sus efectos dispersivos se puedan combinar empleando las conocidas reglas de adición de las dispersiones.

Los efectos extrínsecos son la extinción interestelar y los errores observacionales; ambos son tratados en esta sección en los apartados a y b respectivamente.

a. EXTINCION INTERESTELAR

Una de las principales manifestaciones del polvo interestelar es la extinción de la luz de las estrellas que vemos a través del mismo. Este fenómeno de extinción es producido por dos mecanismos que son, la difusión y la absorción. Desde el punto de vista de un observador que mira a través del polvo, ambos mecanismos no son distinguibles, de manera que en este apartado no se hará ninguna distinción entre ambos.

La extinción interestelar no es independiente de la longitud de onda, sino que, por el contrario, es más intensa hacia las longitudes de onda más cortas.

Efectivamente, la teoría más elemental (van de Hulst, 1957) muestra que, en general, las secciones eficaces de extinción son proporcionales al parámetro adimensional,

$$(1) \quad x = 2\pi a/\lambda \quad ,$$

para longitudes de onda comprendidas entre ∞ y el radio a de la partícula de polvo considerada esférica. Como la extinción se expresa finalmente en magnitudes se tiene

$$(2) \quad A_{\lambda} = -2.5 \log \frac{F(\tau)}{F(\tau=0)} \quad ,$$

mientras que la atenuación lumínica $F(\tau)/F(0)$ tiene una expresión exponencial

$$(3) \quad F(\tau)/F(0) = \exp(-\tau) \quad ,$$

donde la profundidad óptica τ es proporcional a la sección eficaz de extinción, resultando finalmente

$$(4) \quad A_{\lambda} \propto \lambda^{-1}$$

Esta proporcionalidad inversa es verificada con diversos tipos de observaciones (Whitford, 1958; Sharpless, 1963; Johnson, 1967) y se cumple solamente en forma aproximada; de las observaciones resulta

$$(5) \quad A_B = 1.33 A_V$$

11.4.a.

y

$$(6) \quad A_U = 1.56 A_V$$

Tradicionalmente se trabaja con los colores B - V y U - B y los efectos de la extinción sobre los mismos, llamados excesos de color

$$(7) \quad E_{B-V} = B-V - (B-V)_0 = A_B - A_V \geq 0$$

$$(8) \quad E_{U-B} = U-B - (U-B)_0 = A_U - A_B \geq 0$$

donde el subíndice cero indica los colores antes de ser modificados por la extinción interestelar.

Para conocer totalmente los efectos de la extinción basta entonces conocer alguno de los excesos recién definidos o bien alguna de las absorciones. En efecto, si como es más frecuente se expresa todo en función de E_{B-V} se pueden definir dos constantes: R y χ empleando las relaciones (5) y (6) como sigue

$$(9) \quad R = A_V/E_{B-V} = A_V/(A_B - A_V) = 3.0$$

$$(10) \quad \chi = E_{U-B}/E_{B-V} = (A_U - A_B)/(A_B - A_V) = 0.7$$

A medida que se consideran estrellas de distintas temperaturas las longitudes de onda efectivas pueden diferir en algunas decenas de Angströms de las equivalentes tabuladas en la tabla 11.2.T1. Esta variación provoca un ligero cambio de las relaciones (5) y (6) y por consiguiente de las constantes R y χ ; Sin embargo, esas diferencias sólo influyen en un segundo orden en los efectos que aquí se tratan y por lo tanto no fueron consideradas.

La distribución del polvo interestelar está muy lejos de ser uniforme, sino que, por el contrario, el material se acumula en nubes pequeñas que, a su vez, se agrupan en complejos mayores o nubes grandes (Scheffler, 1967).

Como ejemplo sencillo, si se supone un modelo en el que todo el polvo se concentra en nubes iguales que producen un exceso de color E_0 en el B - V y se hallan ubicadas al azar en el plano galáctico con una densidad tal que, en promedio, la visual atraviesa k nubes por kpc, entonces la probabilidad de observar una estrella situada a una distancia r a través de n nubes está dada por la distribución de Poisson

$$(11) \quad p(n) = \frac{(kr)^n \exp(-kr)}{n!}$$

Este modelo, que fue explicado por Münch (1952) permite calcular el valor medio del exceso

$$(12) \quad \langle E_{B-V} \rangle = krE_0$$

y la dispersión

$$(13) \quad \sigma_E = \sqrt{kr}E_0$$

donde se ve claramente que tanto uno como el otro aumentan con la distancia r de las estrellas observadas.

Este modelo no es el adecuado para las estrellas de un cúmulo ya que (11) es válida sólo para visuales dirigidas al azar; sin embargo las conclusiones siguen teniendo validez: La dispersión provocada por la distribución irregular del polvo es menor para los cúmulos más cercanos al Sol, que son justamente los que tienen menor exceso de color promedio.

Como el valor medio del exceso introducido en los modelos no interesa especialmente, se procedió como se detalla a continuación.

Una vez introducidos los efectos intrínsecos detallados en la sección anterior, se calcula para cada estrella un exceso de color en el B - V distribuido normalmente en torno de cero; con él se calculan mediante (9) y (10) el E_{U-B} y el A_V . Finalmente se suma en forma algebraica cada una de estas cantidades a los índices de color y a la magnitud correspondientes.

Las dispersiones del E_{B-V} son tomadas cada $0.^m01$ desde $0.^m00$ hasta $0.^m03$.

b. ERRORES OBSERVACIONALES

Varias son las causas de los errores que se cometen en el curso de las observaciones fotométricas de estrellas con el telescopio. Una lista no muy exhaustiva de las mismas es la siguiente.

- a) El centelleo. Es un fenómeno producido por la turbulencia atmosférica. Consiste en rápidas variaciones de la intensidad luminosa. Se lo puede disminuir prolongando el tiempo de la observación. Es independiente del brillo de la estrella.
- b) Ruido del cielo. Es la influencia que tiene el brillo variable del cielo en las mediciones con un fotómetro monocanal. Se lo puede eliminar con un fotómetro bicanal. Aumenta linealmente con la magnitud aparente de las estrellas observadas.
- c) Variaciones de la transparencia. Estos errores ocurren cuando la extinción atmosférica varía entre el momento de la observación de la estrella de programa y el de las estrellas de referencia. Es independiente de la magnitud y se lo disminuye monitoreando frecuentemente las estrellas de referencia.
- d) Errores de la medición. Incluye pequeñas fallas del equipo electrónico y del telescopio. Un ejemplo es una relojería que sigue imperfectamente a los astros centrados en el diafragma.

e) Errores humanos. Son los provocados por los inevitables descuidos del observador. Aumentan hacia el final de la noche de observación. Ejemplos son: Incorrecto centrado en el diafragma de estrellas débiles. Elección del "cielo" de referencia incluyendo alguna estrella débil o nebulosidad.

Debido a las causas b) y e) estos errores son, en conjunto, mayores para las estrellas más débiles. Dependiendo del tamaño del telescopio, a partir de una cierta magnitud aparente se estabilizan para las estrellas más brillantes para las cuales las causas a), c) y d) son más importantes.

Normalmente se realizan dos o más observaciones de cada estrella, pero con frecuencia las estrellas más débiles son observadas menor número de veces o quizás una sola vez. Esto hace que los valores promedio de la fotometría UBV de las estrellas que se emplean como representativos de la misma, sean más precisos para las estrellas brillantes que para las débiles.

En una compilación que se realiza en el capítulo IV se pudieron obtener estimaciones de las dispersiones causadas por errores observacionales; para la magnitud y los índices de color en función de la magnitud aparente.

Los resultados fueron los siguientes.

$$(1) \quad \sigma_{B-V} = 0.7 \sigma_{U-B}$$

y

$$(2) \quad \sigma_V = 1.1 \sigma_{U-B}$$

La variación de la dispersión con la magnitud resulta algo más difícil de deducir: aparentemente es constante para estrellas más brillantes que magnitud aparente 7 y aumenta para las estrellas más débiles de la siguiente forma

$$(3) \quad \sigma_A = \sigma_{7A} + 0.0012(m - 7) \quad m \geq 7,$$

donde m es la magnitud aparente y el subíndice A es V ó $B-V$ ó $U-B$.

En los cúmulos elegidos como posibles candidatos de comparación con los modelos la dispersión es tal, que magnitud aparente 7 corresponde aproximadamente a magnitud absoluta cero; entonces en los modelos se calculó para cada estrella una dispersión σ_A en función de la magnitud absoluta M

$$(4) \quad \sigma_A(M) = \begin{cases} \sigma_A(0) & M < 0 \\ \sigma_A(0) + 0.0012 M & M \geq 0 \end{cases}$$

con lo cual se calcularon luego los errores ϵ_A distribuidos normalmente. Los errores se suman algebraicamente a los valores UBV obtenidos de los pasos previos de la construcción del modelo. Las dispersiones $\sigma_A(0)$ se tomaron en el $U-B$ cada 0.001 desde 0.000 hasta 0.003.

III: LOS OBSERVABLES

De nada valdría la más detallada de las formulaciones teóricas, o el más completo de los modelos si no se presentara algún aspecto susceptible de comprobación observacional

Sin embargo, puede ocurrir que algún parámetro cuyo valor se desee medir aparezca mezclado con efectos de otra índole. En este caso bastará una adecuada predicción teórica acerca de estos efectos "parásitos" para que sea posible, en principio, estimar separadamente el parámetro que interesa.

En este capítulo se han seleccionado los resultados más fácilmente observables de los modelos, habiéndose descartado todos aquellos cuya obtención sea hipotética. Sin embargo, se agregan algunos resultados que pueden resultar útiles para desentrañar otros aspectos con los cuales se mezclan.

Evidentemente, no es posible realizar las comparaciones en otra forma que no sea estadística. Lamentablemente, en los modelos que se han construido en este trabajo no se puede considerar el efecto provocado por la inclusión de estrellas que no son miembros del cúmulo. Esto se debe a que no existen reglas sencillas que gobiernen su aparición.

Del mismo modo no es posible saber "a priori" si una estrella observada en la zona del cúmulo es o no miembro del mismo. En ese sentido, este trabajo puede dar una idea de cómo y en qué medida es dable admitir algunas estrellas como miembros.

1. DIAGRAMAS COLOR-MAGNITUD Y COLOR-COLOR

Una de las primeras tareas que se realiza con las observaciones fotométricas de las estrellas de un cúmulo, es dibujar los diagramas $(V, B - V)$, $(V, U - B)$ y $(U - B, B - V)$. De su inspección se puede decidir, en primera aproximación si realmente existe un cúmulo en la zona que se observa, pero en este caso la existencia del cúmulo se considera cierta y los diagramas se emplean para decidir cuales estrellas son o no miembros del cúmulo. Por supuesto, siempre quedan casos dudosos para los cuales una posible solución podrían ser los criterios cinemáticos.

En consecuencia se han dibujado los tres diagramas mencionados más arriba para cada uno de los modelos, con el propósito de comparar su apariencia con los observados.

2. ESTADÍSTICA DE LOS MODULOS DE DISTANCIA

Uno de los hechos que resulta más evidente al inspeccionar el diagrama $(V, B - V)$ es que existe una marcada dispersión a lo largo de la secuencia principal, cuya mayor parte es causada por los desplazamientos casi verticales de las binarias y, en menor grado, por los efectos de la rotación; ambos ítems fueron tratados oportunamente en la sección 11.3.

En el caso de las estrellas de un cúmulo observado fotoeléctricamente, no es posible conocer en forma individual el lugar de la secuencia principal, del cual provino originariamente cada estrella. Dado el $B - V$ de la estrella se puede, en cambio, conocer su módulo de distancia aparente. Es decir, se resta la magnitud aparente de cada estrella, del valor de la magnitud absoluta tomado en el correspondiente $B - V$ de la secuencia principal de edad cero (ZAMS). Naturalmente, el índice de color $B - V$ debe ser corregido con el exceso de color promedio del cúmulo.

Si se conoce el módulo verdadero $(m - M)_V$ del cúmulo, se pueden definir las diferencias

$$(1) \quad \delta M = M_Z(B - V) - M = (m - M)_V - \{m - M_Z(B - V)\}$$

donde el subíndice Z indica ZAMS. Estas diferencias son también función del grado de evolución del cúmulo (Johnson, 1960). Lindoff (1968), figura 4, muestra los efectos de la evolución en el δM para distintas edades. Con la definición (1) la binaridad, por ejemplo, produce siempre diferencias $\delta M \geq 0$.

En el caso de los modelos de este trabajo, para calcular los δM recién mencionados sólo es necesario conocer el $M_Z(B - V)$ ya que la magnitud absoluta M es el resultado de lo calculado en la construcción de los modelos. Dado que no se introducen efectos de evolución en los modelos, para calcular el $M_Z(B - V)$ solamente es necesario encontrar las raíces del polinomio dado en 11.2.b.(1). Si dicho polinomio, que fue intencionalmente restringido a grado tres, es identificado con la expresión

$$(2) \quad B - V = \sum_{i=0}^3 a_i M^i$$

entonces las fórmulas de Cardano-Tartaglia permiten hallar la magnitud absoluta M correspondiente a cada $B - V$ de la siguiente forma; definiendo

$$(3) \quad \begin{aligned} c_1 &= a_2/a_3 & Q &= (3c_2 - c_1^2)/9 \\ c_2 &= a_1/a_3 & R &= (9c_1c_2 - 27c_3 - 2c_1^3)/54 \\ c_3 &= \{a_0 - (B - V)\}/a_3 \end{aligned}$$

con los cuales se puede comprobar que el discriminante

$$(4) \quad D = Q^3 + R^2$$

resulta siempre negativo facilitando así el cálculo de la raíz mediante las siguientes fórmulas trigonométricas

$$(5) \quad \theta = \cos^{-1} (-R/\sqrt{-Q^3})$$

$$(6) \quad M_Z(B-V) = -2\sqrt{-Q} \cos(\theta/3 + 240^\circ) - c_1/3$$

Las restantes raíces (cuando se suman 0° y 120° a $\theta/3$) no corresponden al intervalo (M_s, M_i) y por supuesto no representan casos reales.

Todos los cálculos a que se refiere esta sección se realizan únicamente para estrellas cuyo índice de color resulta

$$(7) \quad B-V \leq 0.5^m$$

que corresponde a una magnitud absoluta 4^m si la estrella tiene $\delta M = 0$, es decir unas 3^m por encima de M_i . Esto se hace con el propósito, adelantado en el apartado II.2.a de que la influencia en las características observadas del límite inferior M_i sea mínima.

Para todas las estrellas del modelo que cumplen la condición (7) se realiza un histograma normalizado que muestra las frecuencias de los δM en intervalos de 0.1^m .

También se recuentan las estrellas para hallar el porcentaje h que tiene $\delta M \leq 0$ y finalmente se calculan el valor medio $\overline{\delta M}$ y la dispersión $\sigma_{\delta M}$. Los parámetros h y $\overline{\delta M}$ son de suma utilidad para poder realizar ajustes del módulo de distancia tal como lo describe Johnson (1960).

3. ESTADISTICA DE LOS EXCESOS DE COLOR

Para estimar la dispersión en los índices de color, solamente se puede recurrir al diagrama color-color ($U - B, B - V$), con cuyo auxilio se ha corregido, tradicionalmente, a los índices de color por los efectos de enrojecimiento.

Dada la dispersión que tienen los índices de color a causa de los restantes efectos, la corrección por el enrojecimiento interestelar resulta contaminada por los mismos. Justamente debido a que se trata de una práctica muy difundida, resulta interesante realizar una estadística de los excesos de color para averiguar cómo es influido por las distintas causas de dispersión. Este cálculo se realiza normalmente sólo para la zona de las estrellas de tipos espectrales O y B, en la cual la relación $U - B, B - V$ se aproxima a una recta. La intersección

de esta recta con la de enrojecimiento se obtiene resolviendo un sencillo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $(B - V)_0$ y $(U - B)_0$.

Como en este caso la relación impuesta a los índices de color de las estrellas del modelo fue dada por el polinomio de sexto grado 11.2.b. (2), se debe aproximar, en la zona que interesa $-0.25 \leq B - V \leq 0^m$ a dicho polinomio con una recta; el resultado es

$$(1) \quad (U - B)_0 = \alpha(B - V)_0 + \beta$$

con

$$\alpha = 3.821$$

$$(2) \quad \beta = 0.082$$

Si se recuerda ahora la pendiente de la recta de enrojecimiento definida en 11.4.a. (10) se puede obtener el exceso de color "observado"

$$(3) \quad E'_{B-V} = \frac{\alpha(B - V) - (U - B) + \beta}{\alpha - \chi}$$

el que se indica primado para distinguirlo del verdadero.

La diferencia $\Delta(B - V)$ entre el exceso de color "observado" y el verdadero

$$(4) \quad \Delta(B - V) = E'_{B-V} - E_{B-V}$$

es la provocada por las causas de dispersión distintas del enrojecimiento interestelar.

Esta definición, explicada en detalle por Marraco y Feinstein (1973), puede ser aprovechada para separar estadísticamente de las restantes la dispersión causada por el enrojecimiento. Efectivamente, empleando una técnica de autocorrelación angular concebida por Serkowski (1958) con otros propósitos, es posible obtener haciendo una ligera extrapolación hacia distancia angular nula, la dispersión causada por los efectos ajenos al enrojecimiento. De los resultados de esta técnica aplicada por Feinstein, Marraco y Mirabel (1973) a tres cúmulos, incluyendo NGC 2516, se puede apreciar que la dispersión causada por el polvo interestelar es la que más varía de cúmulo a cúmulo.

Finalmente, cuando se tiene una causa de dispersión independiente de las restantes, la cual provoca además desplazamientos ϵ_{B-V} y ϵ_{U-B} independientes entre sí, tal como es el caso de los errores observacionales, se puede computar su contribución en el σ_E , mediante la fórmula (12) de Marraco y Feinstein (1973). Nótese que por un error tipográfico el primer miembro de esa fórmula no apareció elevado al cuadrado como hubiera correspondido.

Con el fin de poder realizar este análisis se empleó la expresión (3) para calcular excesos de color "observados". Con ellos se calcularon la dispersión σ_E y el valor medio

\bar{E} de las estrellas que cumplen la condición

$$(5) \quad U-B \leq -0.1$$

de cada modelo.

4. ESTADISTICA DE LOS $V \sin i$

Además de los observables fotométricos que ya se han tratado, se pueden realizar observaciones espectroscópicas de las velocidades rotacionales proyectadas.

Estas observaciones que se hacen solamente para las estrellas más brillantes, permiten obtener algunas conclusiones acerca de las distribuciones de las velocidades ecuatoriales y los ángulos de proyección.

Para facilitar más las comparaciones se dividió el rango de las magnitudes absolutas donde aparecen estrellas con rotación (-2^m , 4^m) en tres intervalos de 2^m . En cada uno de dichos intervalos se calculó el valor medio y la dispersión del producto $V \sin i$. En el caso de las estrellas binarias se tomaron solamente los datos de la componente más brillante.

IV. RESULTADOS

Una vez dadas las condiciones iniciales del problema y planteados los mecanismos que se emplean para introducir cada uno de los efectos causantes de dispersión, se pueden obtener los resultados observables detallados en el capítulo III.

De acuerdo a lo expuesto en el capítulo II se tiene la posibilidad de variar:

- 2 funciones de luminosidad,
- 2 distribuciones de la velocidad rotacional,
- 4 distribuciones de las inclinaciones,
- 4 fracciones de binarias,
- 4 dispersiones del exceso de color $B - V$,
- 4 dispersiones del error observacional.

La combinación de estas características en todos los casos posibles demanda la construcción de $2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$ modelos diferentes.

Las pruebas realizadas en el curso de la puesta a punto del programa de cálculo indicaron que en la computadora IBM/360 de la Universidad Nacional de La Plata, cada modelo de 1000 estrellas demanda un tiempo de trabajo de la unidad central de cómputo (CPU) del orden de 7 minutos.

Como 1000 es el menor número aconsejable de estrellas para obtener resultados estadísticamente aceptables, se deduce que calcular la totalidad de los modelos posibles implicaría usar la computadora durante 5 días completos. Para evitarlo se eligió entre las distintas posibilidades de cada una de las características mencionadas más arriba, un valor considerado representativo. Estos valores se denominarán valores normales.

Se calcularon entonces solamente dos series de modelos: 1º variando un sólo parámetro y manteniendo nulos a los demás, y 2º variando el mismo parámetro mientras los restantes toman los valores normales.

Los valores normales elegidos son los siguientes.

- Función de luminosidad constante. Se la elige para facilitar la comparación en el capítulo V
- Distribución de la velocidad rotacional dada por $f(w) = 1; 0 = w = 1$.
- Distribución de las inclinaciones al azar. Estas elecciones fueron sugeridas por los resultados de la estadística de los $V \sin i$ que se analizará luego.

- Fracción de binarias $p = 0.6$. Este valor parece adecuado según los resultados de Jaschek y Gómez (1970).

- Dispersiones del exceso de color $\sigma_E = 0.02$ y de los errores observacionales $\sigma_{U-B} = 0.01$

Estos valores fueron elegidos para facilitar la comparación del capítulo V.

A medida que se realiza la tarea de construcción del modelo se efectúan diagramas color-magnitud y color-color intermedios para controlar la marcha del proceso e interpretar adecuadamente el significado de cada paso. Debe señalarse que si se realiza un conjunto completo de gráficos de un modelo, su tiempo de ejecución en la computadora aproximadamente se duplica.

Los diagramas que representan los pasos sucesivos de la construcción de un modelo de 500 estrellas efectuado con parámetros normales, se presentan en las figuras IV.F1, F2 y F3.

En cada figura las partes a, b, c, y d corresponden a las distintas etapas de la elaboración.

La parte a muestra las estrellas apiñadas a lo largo de las relaciones funcionales dadas en II.2.b. En esta etapa todavía no hay causa de dispersión.

La parte b muestra los efectos de binaridad y rotación combinados como se explica en II.3.

En la parte c ya se ha introducido la dispersión del exceso de color (II.4.a).

Finalmente en la última parte de las figuras aparece el aspecto definitivo de los diagramas luego de haber introducido la dispersión causada por los errores observacionales (II.4.b).

Una de las características más notorias de los diagramas $(V, B - V)$, representado en la figura IV.F1, y $(V, U - B)$, en la figura IV.F2, es la neta separación entre estrellas binarias y simples en la parte inferior de la secuencia. Este efecto es provocado por la cercanía del límite inferior $M_i = 7^m$. Efectivamente, no es posible encontrar componentes secundarias para las estrellas de magnitud absoluta 6^m de manera de obtener un δM de valor intermedio. Sin embargo, la estadística de los δM se realiza recién en la zona que cumple la condición III.2. (a) a fin de que este efecto resulte minimizado.

La inspección de las figuras IV.F1.b y IV.F2.b confirma lo adelantado en la sección III.2 acerca de que, al menos en el modelo normal, la dispersión en el σ_δ es debida fundamentalmente a la binaridad y a la rotación.

Resulta interesante comprobar que la dispersión del exceso de color afecta solamente la

IV.

la parte central del diagrama (V, U - B) representado en la figura IV.F2. c. En la parte superior e inferior la pendiente de la relación $A_V / E_{U-B} = 4.3$ es similar a la de la secuencia principal, no produciéndose desplazamientos verticales.

En el diagrama (U - B, B - V), figura IV.F3.b, se puede apreciar que la binaridad produce sus mayores efectos cerca de las zonas de mayor curvatura de la relación color-color.

Del mismo modo en la figura IV.F3.c se puede apreciar que en las zonas donde la relación color-color tiene una pendiente igual a χ , no hay ensanchamiento por dispersión de los excesos de color. Esto ocurre en la zona correspondiente a los tipos espectrales A3V y G2V.

Finalmente, en estos modelos, la causa más importante de dispersión en la parte inferior de la secuencia, es el error observacional.

La primera estadística que se analizó fue la correspondiente a los $V \sin i$. Sus resultados están resumidos en las tablas IV.T1 y IV.T2.

Tabla IV.T1

Valores de $\overline{V \sin i}$ para dos distribuciones de las velocidades rotacionales

	$f(w)=cte$			$f(w)=cte$		
	$\overline{M} = -1$	+1	+3	-1	+1	+3
$p=0$	193 km/s	162	113	105	95	56
$p=.6$	161	127	92	82	72	54

Tabla IV.T2

Valores de $\overline{V \sin i}$ para distintos casos de coplanaridad, $f(w)=cte$ y $p = 0$.

$\overline{M} =$	-1	+1	+3
$\langle i \rangle = 0^\circ$ *	52 km/s	42	24
$= 45^\circ$	186	143	94
$= 90^\circ$	236	194	143

* Con una dispersión $\sigma_i = 15^\circ$.

El resultado más evidente de la tabla IV.T1 es que la suposición que $f(\omega) = \text{cte}$ entre $\omega=0$ y $\omega=1$ conduce a valores inaceptablemente bajos de los $\langle V \text{ sen } i \rangle$. Por esta razón esta distribución fue descartada en todos los modelos. Por el contrario, la tabla IV.T2 muestra que bajo ningún concepto podemos desechar los casos de coplanaridad de $\langle i \rangle = 45^\circ$ y $\langle i \rangle = 90^\circ$? Como la probabilidad de que aparezca un cúmulo con $\langle i \rangle = 0^\circ$ es escasa, el hecho de que no se observe ninguno con baja velocidad de rotación no permite descartarlo. Sin embargo, como mediante los $\langle V \text{ sen } i \rangle$ aquí dados no es posible distinguir entre un caso de coplanaridad y la distribución al azar, se eligió a esta última como representativa de la condición "normal".

En la figura IV.F4 se comparan los resultados de los $\langle V \text{ sen } i \rangle$ tabulados en la tabla IV.T1 para $f(\omega) = \text{cte}$ e inclinación al azar, con los valores observados espectroscópicamente en dos cúmulos galácticos citados por Abt (1970). Se aprecia que, dentro de la sencillez del modelo, la comparación con la observación es excelente.

Otro aspecto que se controló inmediatamente fue el concerniente a la función de luminosidad. En forma similar a lo ya comprobado por otros autores (Schlesinger, 1971; Hejlesen, 1972) se pudo comprobar que su influencia sobre los resultados es prácticamente nula. Efectivamente, la diferencia entre los resultados de los modelos calculados con las diferentes funciones de luminosidad es siempre menor que la fluctuación estadística del sistema de cálculo.

Una vez reducidos, tanto la distribución de las velocidades rotacionales como la función de luminosidad, a una sola posibilidad, se necesitan 28 modelos distintos para realizar las dos series previstas.

Los resultados de los cinco observables definidos en el capítulo III: $\overline{\delta M}$, σ_δ , h , $\overline{E_B}$ y σ_E , han sido tabulados para las dos series de modelos en la tabla IV.T3.

Para los modelos de la 1a. serie los resultados están ajustados para que resulte

$$(1) \quad \overline{\delta M} = \overline{E} = 0$$

cuando no hay causa de dispersión.

Una excepción la constituyen los resultados de la rotación que fueron ajustados de manera que (1) se cumpla cuando i está distribuido al azar.

En los modelos de la 2a. serie, se impuso la condición (1) al modelo con $p=0$ y rotación al azar, y los restantes se ajustaron consecuentemente.

Esta situación se debe a que tanto los colores intrínsecos (Johnson, 1966) como la secuencia

	$\overline{\delta M}$	σ_{δ}	h	\overline{E}	$\sigma_{E'}$	$\overline{\delta M}$	σ_{δ}	h	\overline{E}	$\sigma_{E'}$
P = 0	.000	.000	.50	.0000	.0000	.000	.236	.56	.0000	.0240
.3	.108	.205	.35	.0013	.0052	.075	.277	.45	.0001	.0234
.6	.172	.229	.15	.0050	.0102	.117	.300	.39	-.0020	.0233
.9	.219	.228	.05	.0046	.0089	.150	.275	.31	-.0016	.0223
V = 0	.000	.000	.50	.0000	.0000	.127	.304	.39	.0020	.0230
V ≠ 0 <i> = 0°	.025	.141	.67	-.0129	.0015	.114	.271	.37	-.0070	.0205
45°	.027	.145	.68	-.0049	.0077	.097	.278	.40	-.0046	.0229
90°	.024	.202	.58	.0069	.0164	.140	.282	.31	.0047	.0238
al azar	.000	.183	.64	.0000	.0137	.117	.300	.39	-.0020	.0233
$\sigma_E = .00$.000	.000	.50	.0000	.0000	.132	.237	.33	.0026	.0136
.01	.002	.095	.50	.0001	.0114	.114	.251	.35	.0003	.0159
.02	.005	.161	.49	.0002	.0193	.117	.300	.39	-.0020	.0233
.03	.013	.227	.49	.0000	.0308	.131	.317	.37	-.0025	.0316
$\sigma_{U-B} = .00$.000	.000	.50	.0000	.0000	.154	.274	.33	.0029	.0222
.01	-.003	.079	.50	-.0006	.0084	.117	.300	.39	-.0020	.0233
.02	-.008	.156	.51	-.0004	.0183	.131	.300	.33	-.0003	.0270
.03	.005	.216	.47	.0008	.0270	.135	.355	.36	.0019	.0350

cia principal de edad cero (Schmidt-Kaler, 1965) representan una muestra de estrellas en su mayoría simples y con las inclinaciones dirigidas al azar. De esta forma los $\overline{\delta M}$ por ejemplo, pueden emplearse para ajustar los módulos de distancia de cúmulos cuya fracción de binarias p es conocida, o estimada por otras fuentes.

Los resultados de la tabla IV.T3 son graficados en la figura IV.F5 en función de los parámetros p , σ_{U-B} , σ_E . Los círculos vacíos corresponden a la 1a. serie y los llenos a la 2a. serie, en la cual los parámetros restantes mantienen sus valores "normales".

Como ya se adelantó oportunamente, resulta evidente que la binaridad es un fenómeno que actúa en forma asimétrica; por el contrario, la dispersión del exceso y la de los errores observacionales son esencialmente simétricos.

Resulta notorio comprobar que la dispersión σ_δ provocada por la binaridad solamente (círculos vacíos) no aumenta más allá de $p = 3$. Es que al formarse cada vez más binarias se toma estrellas simples ($\delta M = 0$) y se las sustituye por dobles ($0 \leq \delta M \leq 0.75$) aumentando el $\overline{\delta M}$ pero cambiando poco la dispersión dado que se trata de un simple desplazamiento.

Cuando se analiza el comportamiento de la dispersión en condiciones normales (círculos llenos) se comprueba que σ_δ disminuye ligeramente para $p = 0.9$. En este caso, a las causas enunciadas más arriba se suma la influencia de la binaridad que achica las velocidades rotacionales, disminuyendo la dispersión por rotación.

Finalmente, en la estadística de los excesos de color se puede decir que el \overline{E} es casi invariable mientras que la dispersión observada σ_E , coincide con la verdadera σ_E solamente durante el curso de la 1a. serie (círculos vacíos).

La fórmula (12) de Marraco y Feinstein (1973) predice perfectamente el σ_E para los errores observacionales empleados.

Los histogramas de frecuencias relativas para los δM de las estrellas de los modelos se muestran en las figuras V.F6, F7, F8, y F9. En la parte superior de cada figura se presentan los histogramas correspondientes a la 1ra serie de modelos, y en la inferior los de la 2da; nótese que hay un cambio de escala en las frecuencias relativas. En todos los casos una pequeña flecha indica la posición de $\delta M = 0$ ajustada según la condición (1). No se ha representado el histograma correspondiente al modelo sin causas de dispersión ya que en dicho caso el 100% de las estrellas se ubica en $\delta M = 0$.

La asimetría de los efectos de rotación se pone en evidencia en la figura IV.F6 ; al mismo tiempo se puede apreciar que un caso de coplanaridad con una inclinación media dada por

$$(2) \quad 45^\circ \leq \langle i \rangle \leq 90^\circ$$

es indistinguible en sus efectos de una distribución al azar de las inclinaciones.

En la figura IV.F7 se observan los efectos de la binaridad sobre la distribución de los δM . El caso de $p = 1$ corresponde a la distribución de las binarias solamente. Este resultado es comparado en la tabla IV.T4 con los obtenidos por Heintz (1969) para los casos de distribución de cocientes de masa dados por las fórmulas II.3.b.(8) y (10).

Tabla IV.T4

Comparación de las frecuencias relativas de los δM

δM	II.3.b.(8)	II.3.b.(10)	$p = 1$
$^m.00$.62	.53	.55
.15	.10	.12	.16
.30	.07	.08	.09
.45	.08	.10	.08
.60	.13	.17	.12
.75			

Se comprueba que las suposiciones hechas en el apartado II.3.b acerca de las binarias arrojan resultados coincidentes con los obtenidos a través de distribuciones que han sido ajustadas a las observaciones.

Una vez más los histogramas correspondientes a los efectos del exceso de color variable y de los errores observacionales (Figuras IV.F8 y F9 respectivamente) confirman que sus efectos son esencialmente simétricos. Ambos efectos tienden a hacer desaparecer la distribución asimétrica dada por la binaridad y la rotación. Sin embargo la distribución permanece sensiblemente asimétrica excepto quizás en el caso de $\sigma_{U-B} = ^m.03$.

V. COMPARACION CON EL CUMULO NGC 2516

La elección del cúmulo NGC 2516 para realizar la comparación con los modelos fue dictada por la reciente disponibilidad de un adecuado número de observaciones UBV fotoeléctricas realizadas por diversos autores.

La fotometría fotoeléctrica mencionada incluye los siguientes trabajos:

Cox (1955)	44 estrellas en el sistema PV.
Evans, Menzies, Stoy y Wayman (1961)	15 estrellas en el sistema UcbV.
Dachs (1970)	70 estrellas en el sistema UBV.
Eggen (1972)	145 estrellas en el sistema UBV.
Feinstein, Marraco y Mirabel (1973)	104 estrellas en el sistema UBV.

Todo este material fue reducido a un sistema homogéneo de magnitudes e índices de color mediante las fórmulas de transformación dadas por Feinstein et al. (1973) tabla 4. Para el trabajo de Eggen (1972), que no figura en dicha tabla, las fórmulas de transformación al sistema homogéneo son las siguientes

$$(1) \quad V = V_E - 0.027 - 0.015 (B-V)_E$$

$$(2) \quad B-V = 0.993 (B-V)_E + 0.015$$

$$(3) \quad U-B = 1.006 (U-B)_E + 0.012$$

Una vez reducidas al sistema de magnitudes mencionado todas las observaciones fueron combinadas en una única tabla de valores UBV a la cual se refieren todos los resultados que se mencionan en este capítulo.

Mediante estas mismas observaciones se pudo obtener el error observacional externo de los promedios resultantes. Estos resultados, que fueron adelantados en el capítulo III, sección III.3, dan una dispersión en el U-B para las estrellas más brillantes que magnitud aparente 7 el siguiente valor

$$(4) \quad \sigma_{U-B} = 0.^m01$$

que justifica la elección, hecha en el capítulo IV, del valor "normal" de la dispersión observacional de los modelos.

Disponiendo ahora de 47 estrellas tempranas se realizó un análisis de autocorrelación angular tal como fue explicado en la sección III.3. Se obtuvieron los siguientes resultados: la dispersión de los excesos observados es

$$(5) \quad \sigma_{E'} = 0.^m0254$$

de la cual la contribución correspondiente al exceso verdadero es

$$(6) \quad \left(\sigma_E = 0^m.0173 \right)$$

lo que deja en el exceso observado una dispersión

$$(7) \quad \sigma_{E'} = 0^m.0186$$

debida a las restantes causas.

La condición "normal" tomada en el capítulo IV para σ_E se debe al resultado (6). Este valor obtenido con más y mejores observaciones reemplaza al dado en la tabla 6 por Feinstein et al. (1973).

Snowden (1974) encuentra que la dispersión provocada por el exceso es mayor que la causada por otras razones. Este resultado no contradice lo aquí hallado, pues está basado en fotometría con el sistema $uvby\beta$ para el cual los efectos de rotación, en particular, tienen menor influencia. Por otro lado los errores observacionales en el sistema mencionado suelen ser algo menores que en el sistema UBV. Snowden cita como $^m.023$ la dispersión observada en las estrellas de tipo B, si combinamos ese valor con el dado en (6) para el exceso verdadero se encuentra que la dispersión debida a otras causas es $^m.015$ es decir algo menor que la provocada por el exceso y confirmando lo explicado más arriba.

Los diagramas color-magnitud y color-color están representados en las figuras V.F2, F3 y F4. Estos han sido confeccionados mediante los valores UBV observados luego de ser reducidos con un exceso de color promedio $\bar{E}_{B-V} = ^m.12$ y un módulo de distancia $m-M = 8.30$. Se han eliminado de los diagramas todas las estrellas sospechosas de ser "no-miembros" de acuerdo con los trabajos de los cuales se tomó la fotometría empleada. Sin embargo restan serias dudas acerca de ciertas estrellas ubicadas en situaciones límites. Burki y Maeder (1973) en sus figuras 1 y 5 dan claros ejemplos de cómo se disponen las estrellas de campo (no-miembros) en los diagramas fotométricos del sistema UBV. De estas figuras se puede concluir que, para el caso de un cúmulo galáctico observado en una latitud galáctica elevada como es el caso de NGC2516, la mayor parte de las estrellas "no-miembros" aparecen mezcladas con los miembros ocupando aproximadamente la misma zona de los diagramas. Por todo lo expuesto se puede asegurar que las estrellas que se toman aquí como miembros de NGC2516 están seguramente contaminadas por estrellas ajenas al cúmulo.

La comparación de las figuras V.F2, F3 y F4 con las correspondientes de los modelos

se ve dificultada por la desigual cantidad de estrellas y porque los modelos no incluyen dispersión por edad variable que afecta la parte superior de las secuencias. Sin embargo, la contaminación por parte de estrellas de campo resulta evidente, ya que es la única causa de dispersión, omitida en los modelos, que interviene en magnitudes absolutas intermedias.

Para las 110 estrellas del cúmulo comprendidas entre $m_V = 8$ y $m_V = 12$ se calcularon los δM definidos por la expresión III.2.(1). Para ello se usó un módulo de distancia de $8^m.30$ y las magnitudes absolutas fueron tomadas de la ZAMS tabulada por Schmidt-Kaler (1965). Los δM resultantes fueron corregidos por los efectos de la evolución mediante una isocrona tomada de Lindoff (1968) para una edad de 3.4×10^7 años. El histograma de las frecuencias relativas correspondiente ha sido dibujado en la figura V.F1 mientras que la dispersión obtenida es

$$(8) \quad \sigma_{\delta} = 0^m.326$$

Tanto la dispersión observada en el exceso de color como la de los módulos de distancia son algo mayores a las del modelo "normal"; dado que es imposible aumentar a esta última cambiando la ley de rotación δ aumentando el valor de la fracción de binarias p , y que los valores de los efectos extrínsecos han sido determinados externamente estando dados por (4) y (6), se debe concluir que a la luz de los presentes modelos existen otras causas de dispersión, presumiblemente contaminación mediante estrellas no-miembros.

En la Tabla V.T1 se desglosan las contribuciones de las distintas causas de dispersión en el σ_{δ} si se admite $p = .6$ para NGC 2516.

La comparación del histograma correspondiente a NGC 2516 -figura V.F1- con los correspondientes a los modelos sugiere que podrían considerarse como "no-miembros" a las estrellas responsables del extremo derecho en la distribución de los δM . Si se eliminan las cinco estrellas que provocan el pequeño grupo ubicado en $\delta M = 1^m.1$ y $1^m.0$, entonces se obtiene

$$(9) \quad \sigma_{\delta} = 0^m.286$$

compatible con las dispersiones obtenidas en los modelos normales para $.3 \leq p \leq .9$.

Este último resultado muestra lo sensible que es el procedimiento a la admisión de estrellas como miembros.

Finalmente se dan en la Tabla V.T2 los módulos (sin corregir por el exceso de color promedio) resultantes de ajustar los valores observados de $\overline{\delta M}$ y de h a los resultados de

los modelos normales para distintas fracciones de binarias. Los valores observados corresponden a la distribución despojada del grupo en $\delta M \cong 1.05$.

Se comprueba que el módulo de distancia es más sensible al ajuste por intermedio de h . De la coincidencia de ambos módulos se deduce que el porcentaje más adecuado de binarias en NGC 2516 es del orden de 60%.

Una vez más resulta clara la importancia de contar con criterios independientes para decidir la pertenencia de estrellas a un cúmulo. De esta manera se podrían controlar los resultados aquí obtenidos en forma definitiva y luego emplearlos en otros casos.-

Tabla V.T1

Contribución a la dispersión σ_δ

Causa	Dispersión	Contribución
Error observacional	$m.079$	6 %
Exceso de color variable	$m.161$	24 %
Binaridad + rotación	$m.240$	55 %
Otras (no-miembros)	$m.127$	15 %
Total	$m.326$	100 %

Tabla V.T2

Módulos de distancia computados para distintas fracciones de binarias

p	Mediante $\overline{\delta M}$	Mediante h
.3	8.14	8.12
.6	8.18	8.18
.9	8.21	8.23

REFERENCIAS

- Abt, H. A. 1967 en "The Magnetic and Related Stars" p.173, Mono Book Corp. Baltimore. 2:
- Abt, H. A. 1970 en "Stellar Rotation" p.193, Reidel Dordrecht.
- Aguekian, T. 1974 "Estrellas Galaxias y Metagalaxia", MIR, Moscú.
- Alexander, J. B. 1968 Quarterly Journal Roy. Astr. Soc. 9, 136.
- Barnett, V. D. 1962 Mathematics of Computation 16, 63.
- Becker, W. 1974 "Summer Institute in Galactic Structure at Ankara University" Ankara.
- Bergh, S. van den y Sher, D. 1960 Public. David Dunlap Obs. 2, 203.
- Bernacca, P. L. y Perinotto, M. 1974 Astron & Astrophys. 33, 443-
- Bodenheimer, P. 1972 Rep. Prog. Phys. 35, 1.
- Burbidge, G. R. y Burbidge, E. M. 1958 Encyclopedia of Physics 51, 134.
- Burki, G. y Maeder, A. 1973 Astron & Astrophys. 25, 71.
- Collins, G. W. 1966 Astrophys. J. 146, 914. 16
- Cox, A. N. 1955 Astrophys. J. 121, 628.
- Dachs, J. 1970 Astron. & Astrophys. 5, 312.
- Eggen, O. J. 1972 Astrophys. J. 173, 63.
- Evans, D. S., Menzies, A., Stoy, R. H. y Wayman, P. A. 1961 Roy. Obs. Bull. 48.
- Faulkner, J., Roxburgh, I. W. y Strittmatter, P. A. 1968 Astrophys. J. 151, 203.
- Feinstein, A., Marraco, H. G. y Mirabel, I. 1973 Astron. & Astrophys. Suppl. 9, 233.
- Fernie, J. D. y Rosemberg, W. J. 1961 Public. Astron. Soc. Pacific 73, 259.
- FitzGerald, M. P. 1970 Astron. & Astrophys. 4, 234.
- Fröberg, C. E. 1969 "Introduction to Numerical Analysis" 2ond Ed. Addison-Wesley, Mass.
- Hamming, R. W. 1962 "Numerical Methods for Scientists and Engineers" Mc Graw Hill, N.Y.
- Hardorp, J. y Strittmatter, P. A. 1968 Astrophys. J. 151, 1057.
- Heintz, W. D. 1969 Journal Roy. Astr. Soc. Canada 63, 275.
- Hejlesen, P. M. 1972 IAU Coll. No 17, XVIII, Meudon.
- Herbig, G. H. 1962 "La Plata Symposium on Stellar Evolution" p.45, La Plata.
- Hulst, H. C. van de 1957 Light Scattering by Small Particles", Wiley, New York.
- Hynek, J. A. 1967 en "Modern Astrophysics" p.225, Gauthier Villars, Parfs.
- IBM 1970 System /360 Scientific Subroutine Package (FORTRAN IV) Version III, IBM Corp.

- Iriarte, B. 1967 Bol. Tonanzintla y Tacubaya 4, 79.
- Jackson, S., Sanderson, A. D., Connon Smith, R. y Hazlehurst, J. 1971 Astrophys. J. 165, 2
- Jaschek, C. 1970 "Double Star Astronomy" Observatoire de Geneve.
- Jaschek, C. O. R. 1971 Publ. Obs. Geneve Fasc. 78.
- Jaschek, C. O. R. y Ferrer, O. 1972 Publ. Astron. Soc. Pacific 84, 292.
- Jaschek, C. y Gómez, A. E. 1970 Publ. Astron. Soc. Pacific 82, 809.
- Jaschek, C. y Jaschek, M. 1957 Publ. Astron. Soc. Pacific 69, 337.
- Jaschek, C. y Jaschek, M. 1967 en "The Magnetic and Related Stars" p.287, Mono Book Corp. Baltimore.
- Jaschek, C. y Jaschek, M. 1973 IAU Symp. Nº 50, Reidel, Dordrecht.
- Johnson, H. L. 1960 Lowell Obs. Bull. 5, 17.
- Johnson, H. L. 1966 Anual Review of Astronomy and Astrophysics 4, 193.
- Johnson, H. L. 1968 en "Stars and Stellar Systems" vol. 7, University of Chicago Press, p.16
- Kuiper, G. P. 1935 Publ. Astron. Soc. Pacific 47, 15.
- Levato, H. 1974 Astron. & Astrophys. 35, 259.
- Lindoff, U. 1968 Arkiv Astron. 5, 1.
- Maeder, A. 1968 Publ. Obs. Geneve Fasc. 75.
- Maeder, A. 1974 Astron. & Astrophys. 32, 177.
- Maeder, A. y Peytremann, E. 1970 Astron. & Astrophys. 7, 120.
- Maeder, A. y Peytremann, E. 1972 Astron. & Astrophys. 21, 279.
- Marraco, H. G. y Feinstein, A. 1973 Astron. & Astrophys. Suppl. 9, 233 Apéndice.
- Münch, G. 1952 Astrophys. J. 116, 575.
- Reddish, V. C. 1965 Vistas in Astronomy 7, 173.
- Roxburgh, I. W., Griffith, J. S. y Sweet, P. A. 1965 Zeitschrift Astrophys. 61, 203.
- Roxburgh, I. W. y Strittmatter, P. A. 1965 Zeitschrift Astrophys. 63, 15.
- Sackmann, I. J. y Anand, S. P. S. 1970 Astrophys. J. 162, 105.
- Salpeter, E. E. 1955 Astrophys. J. 121, 161.
- Sanderson, A. D., Connon Smith, R. y Hazlehurst, J. 1970 Astrophys. J. 159, L69.
- Scheffler, H. 1967 Zeitschrift Astrophys. 65, 60.
- Schlesinger, B. M. 1971 Astrophys. J. 166, 447.

- Schlesinger, B. M. 1972 *Astron. J.* 77, 584.
- Schmidt-Kaler, Th. 1965 *Landolt Börnstein, New Series VI/1* p.297, Springer, Berlfn.
- Serkowski, K. 1958 *Acta Astron.* 8, 135.
- Sharpless, S. 1963 en "Stars and Stellar Systems" vol 3, p.225, Univ. Chicago Press.
- Slettebak, A. 1970 en "Stellar Rotation" p.3, Reidel, Dordrecht.
- Smak, J. 1967 *Acta Astron.* 17, 213.
- Snowden, M. 1974 Tesis Doctoral, Kitt Peak Nat. Obs.
- Sweet, P. A. y Roy, A. E. 1953 *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 113, 701.
- Vazsonyi, A. 1970 "Problem Solving by Digital Computers with PL/1 Programming", Prentice Hall, N. Jersey.
- Warner, B. 1961 *Publ. Astron. Soc. Pacific* 73, 439.
- Whitford, A. E. 1958 *Astron. J.* 63, 201.

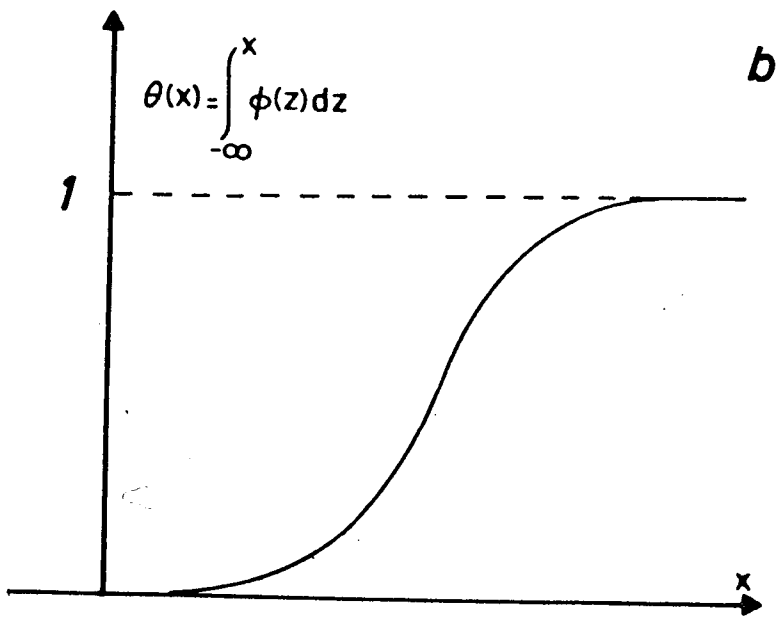
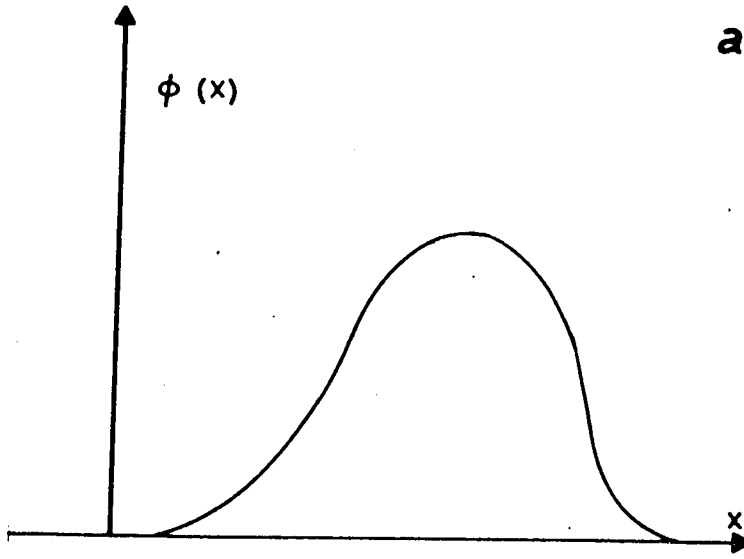


Figura II.1.b.F1

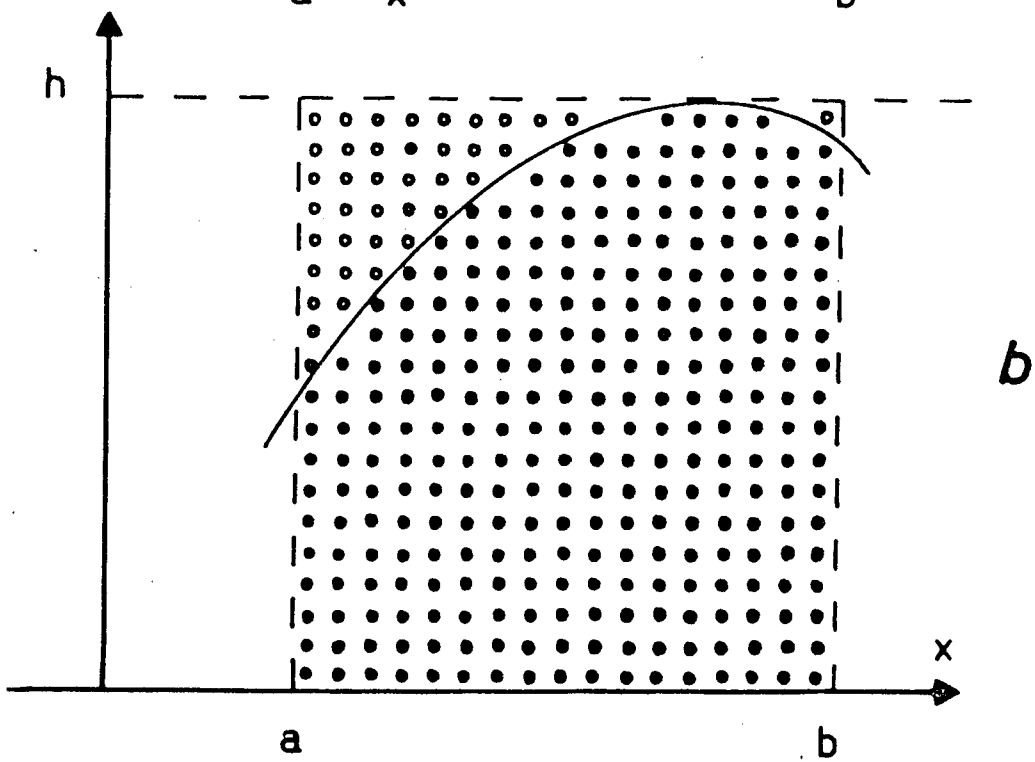
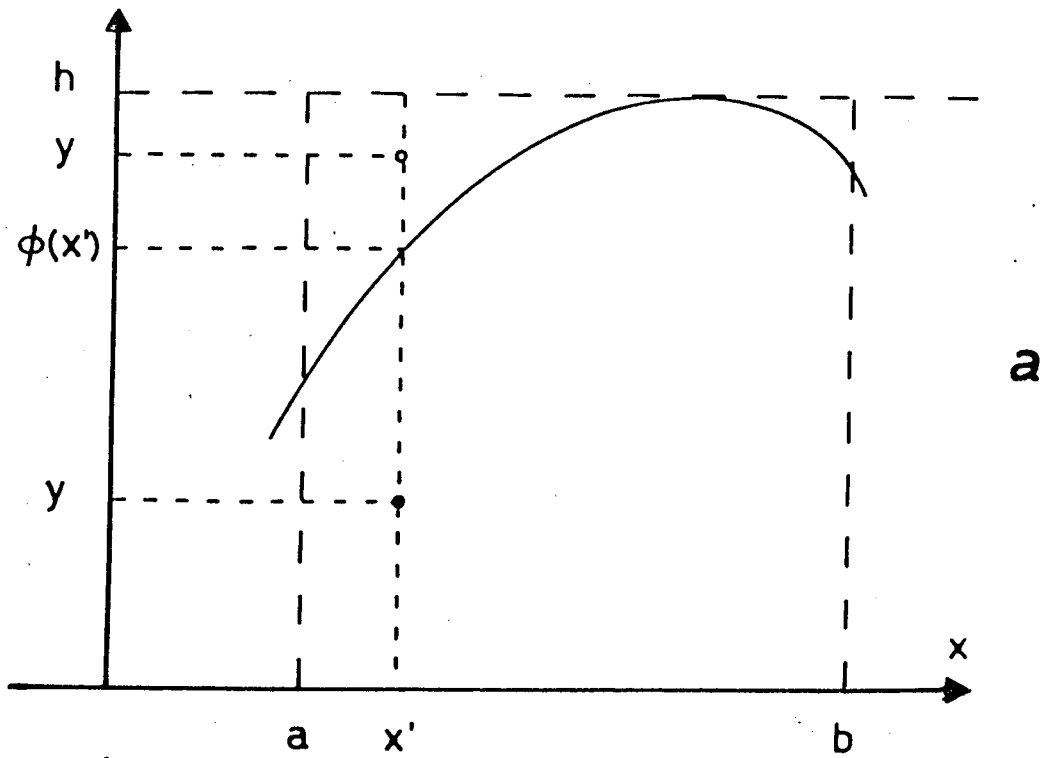
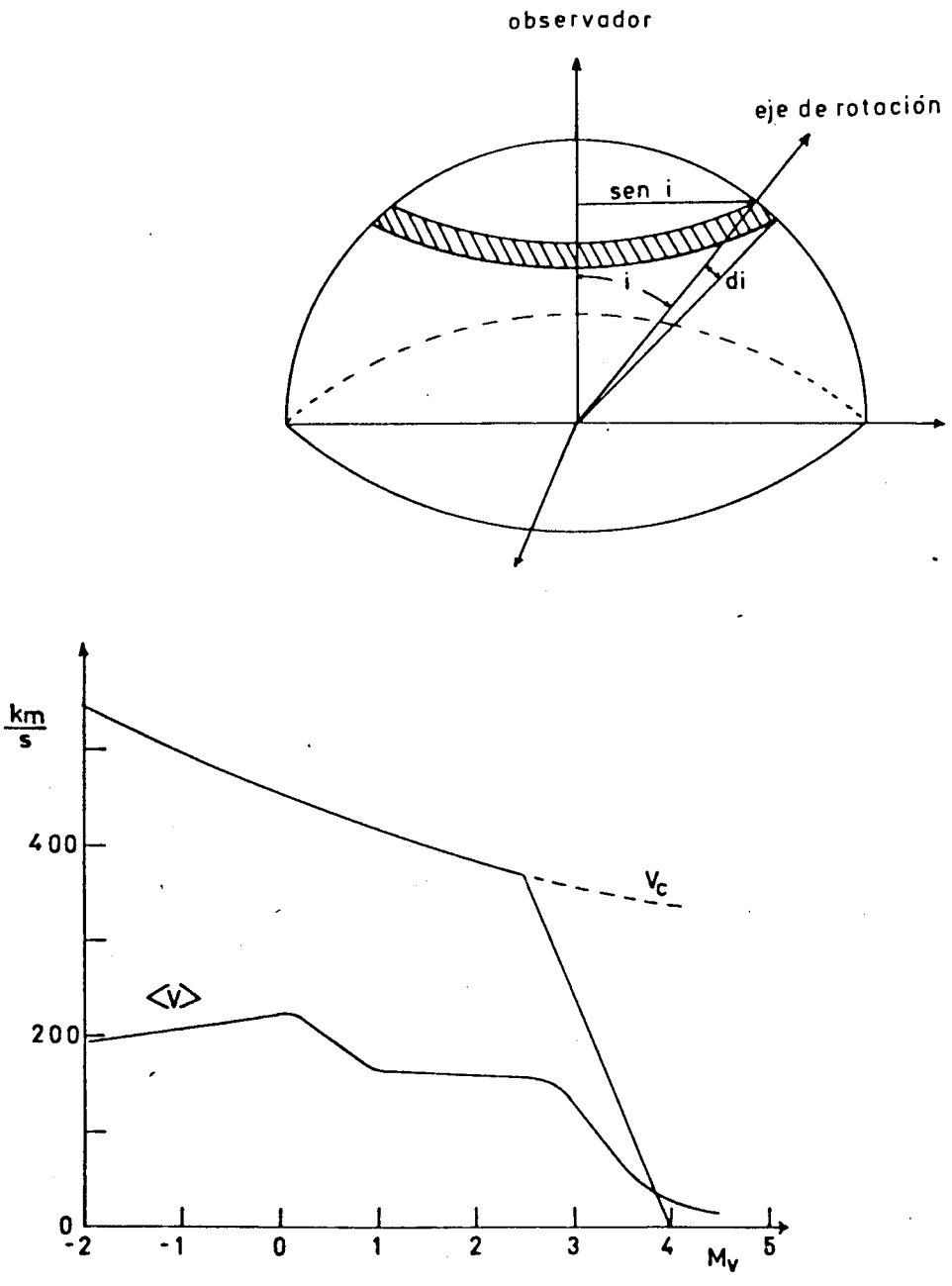


Figura II.1.b.F2



Figuras II.3.a.F1 y F2

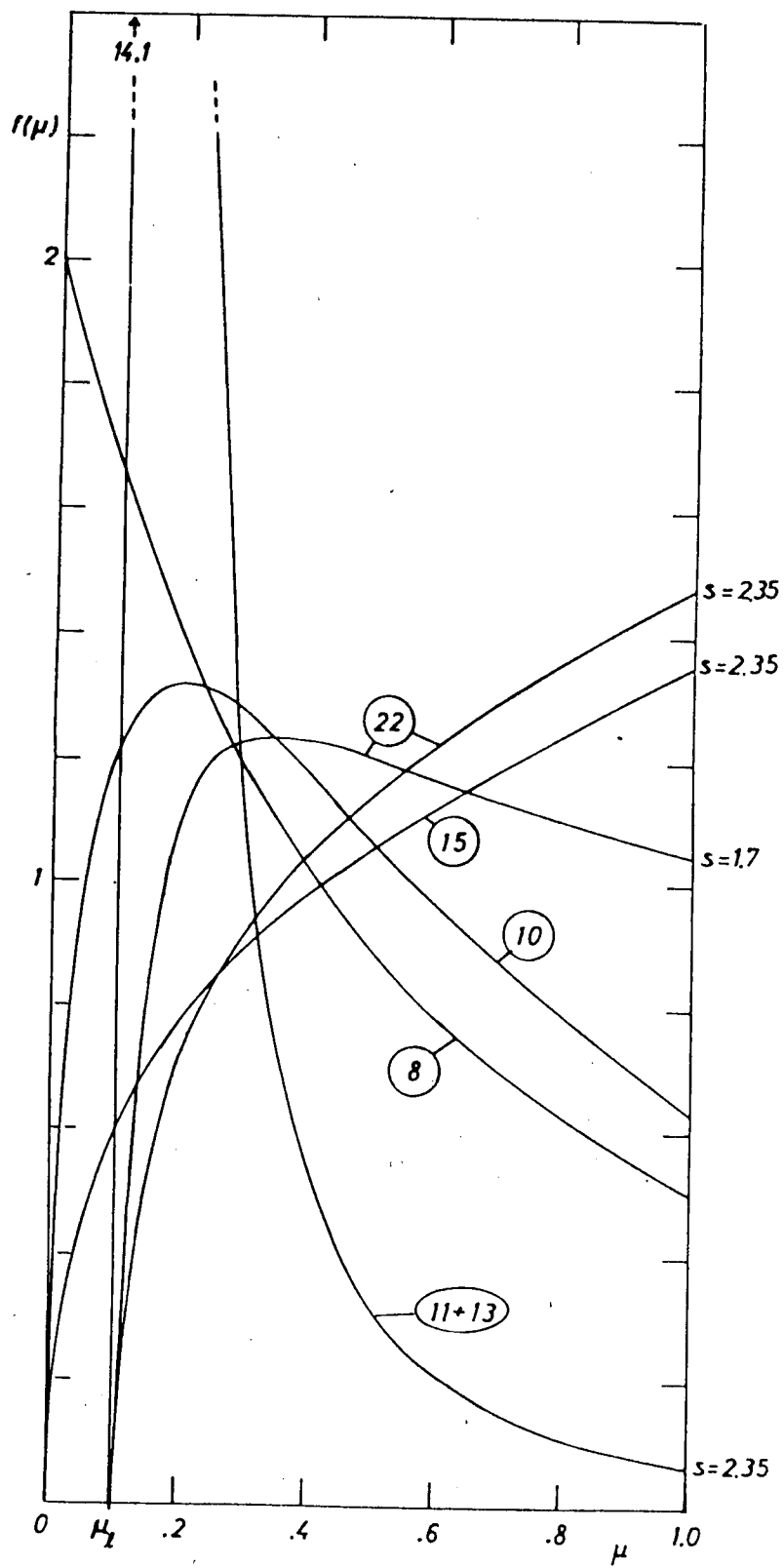


Figura II.3.b.F1

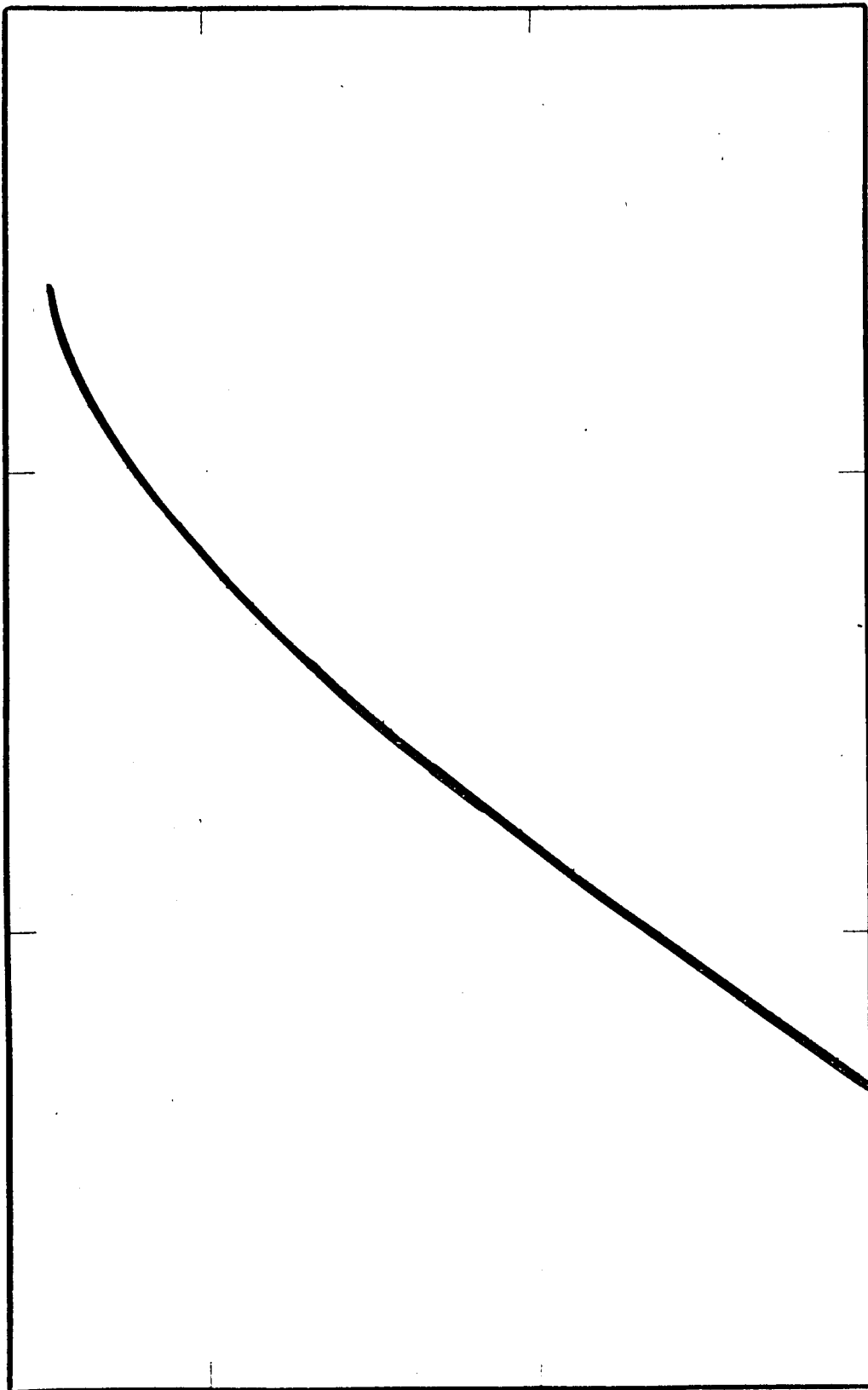


Figura IV.F1.a

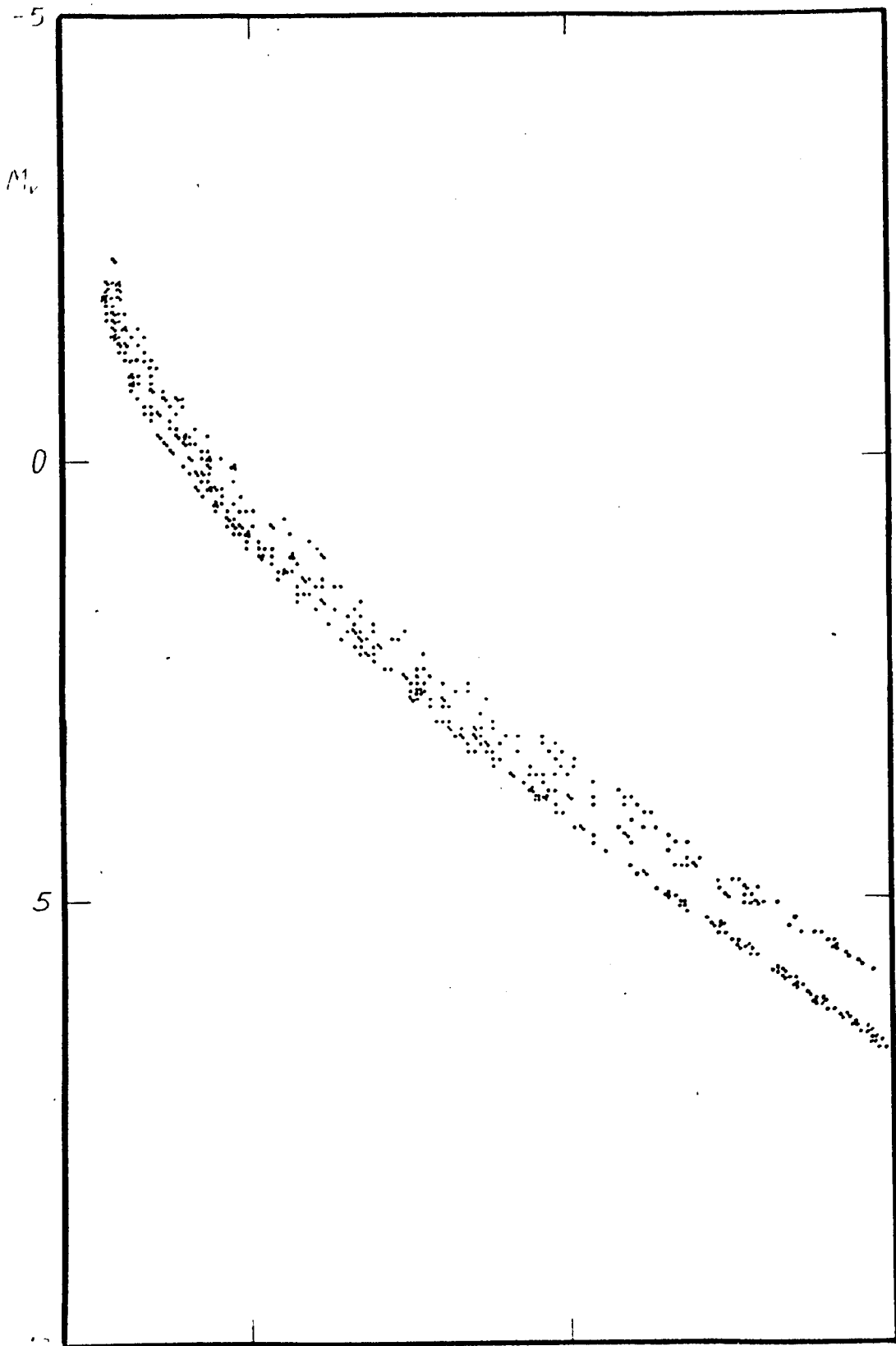


Figura IV.F1.b

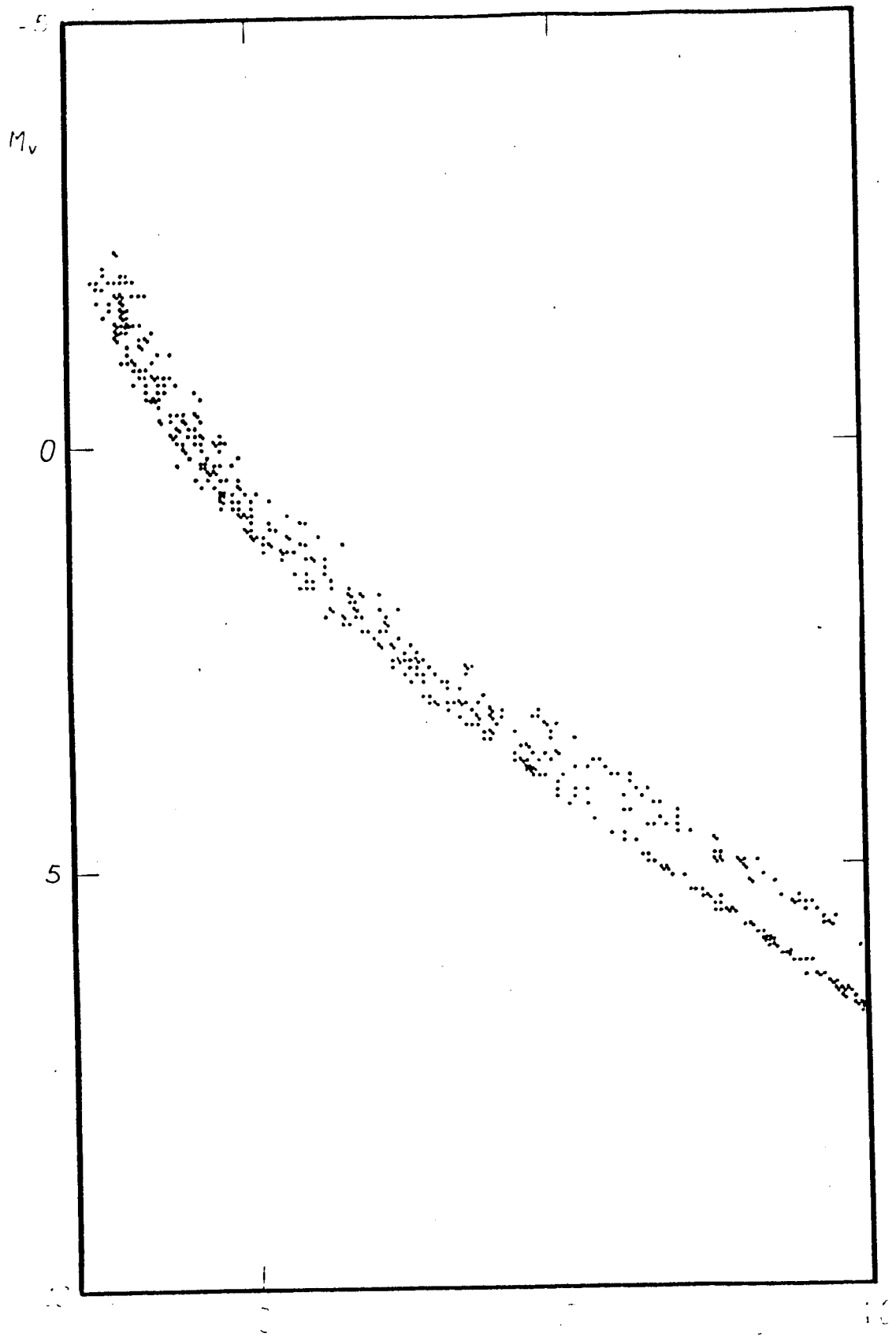


Figura IV.F1.c

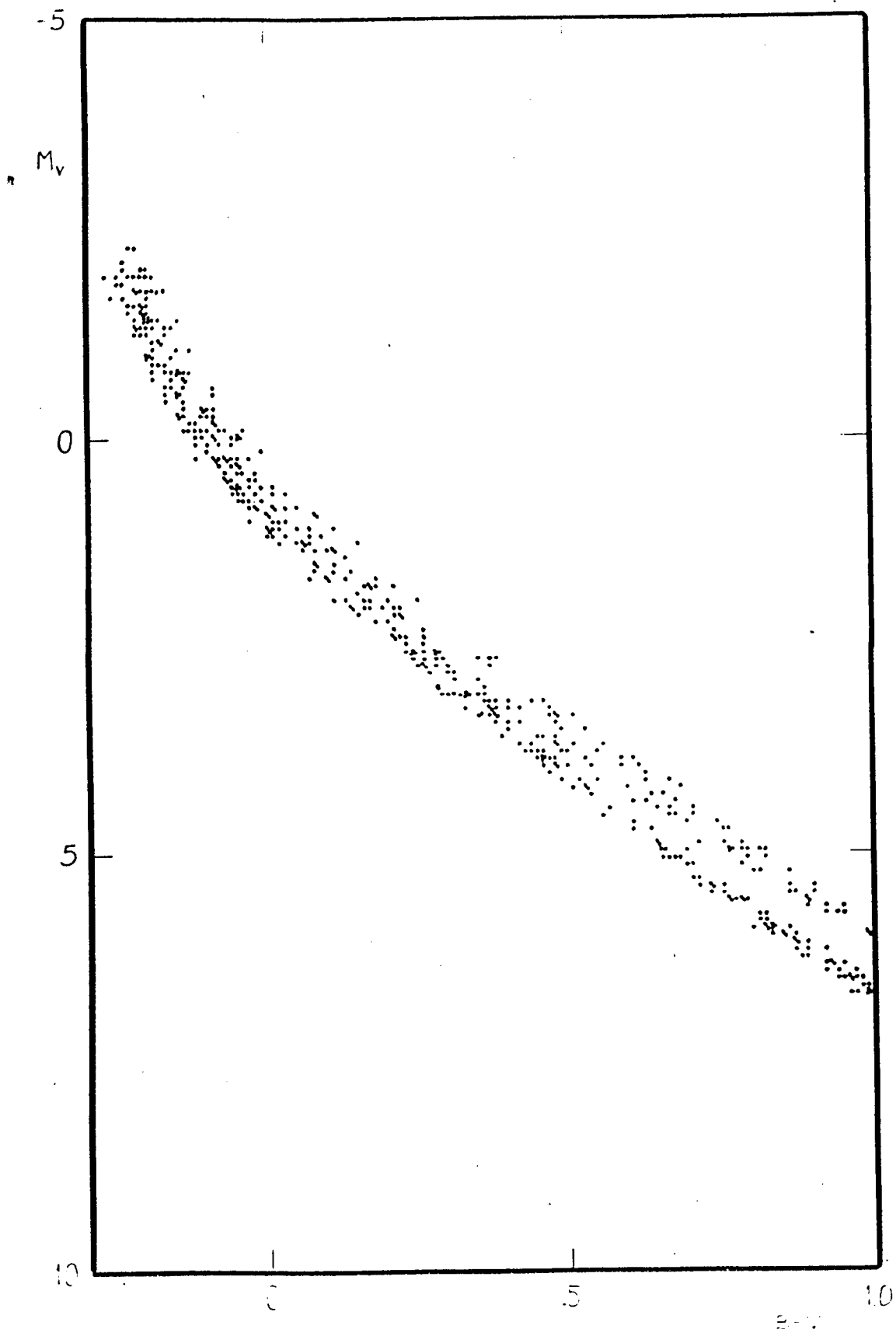


Figura IV.F1.d

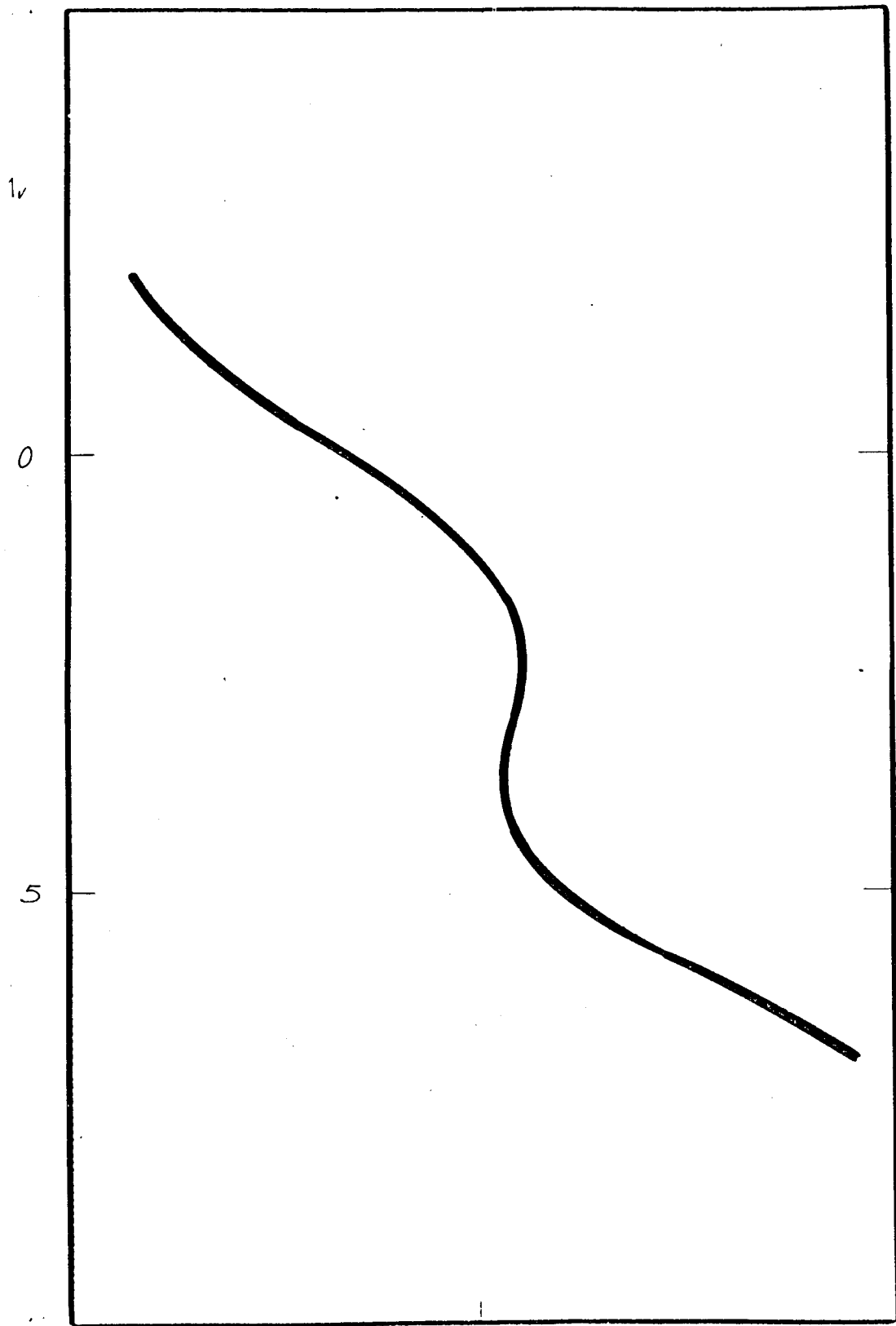


Figura IV.F2.a

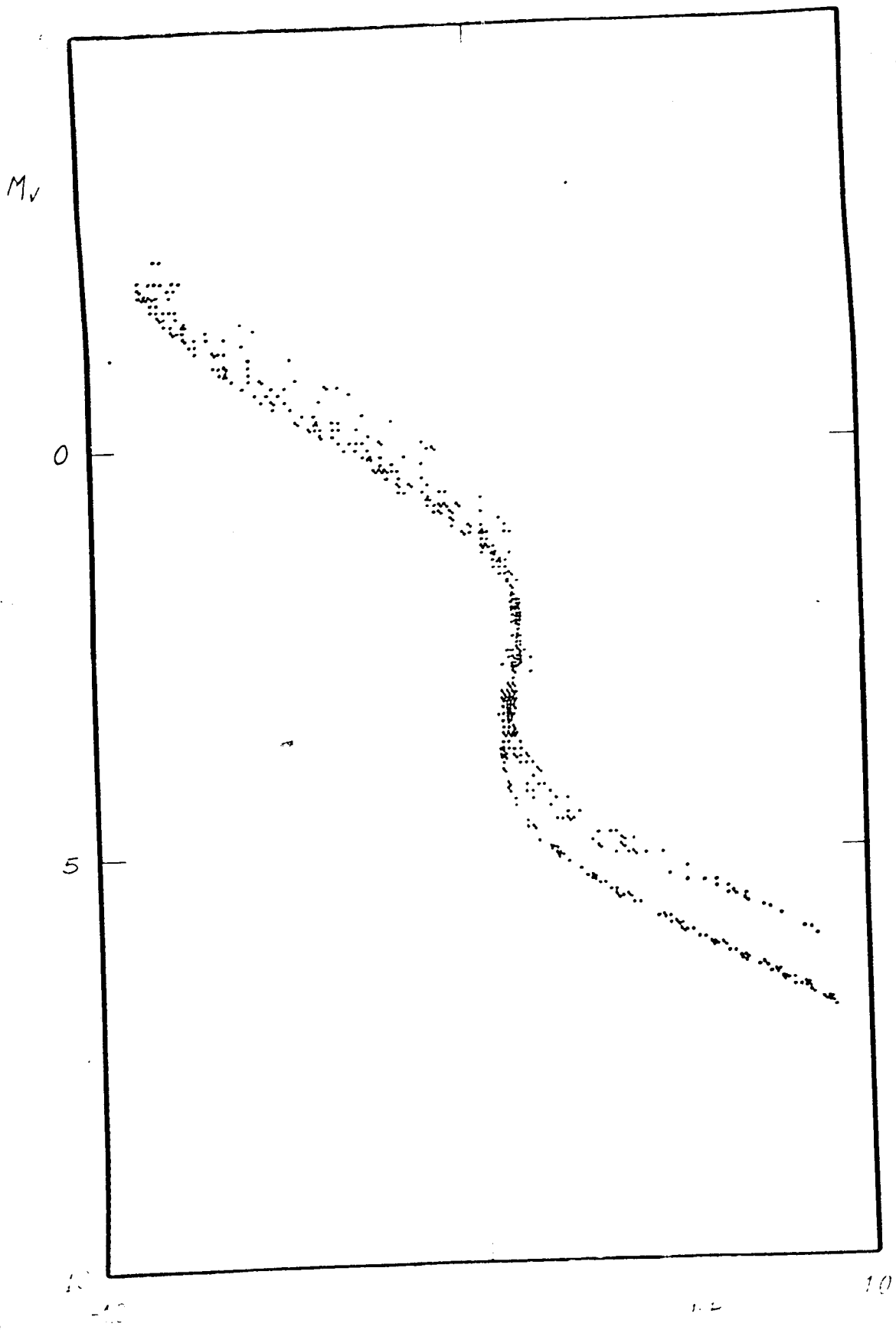


Figura IV.F2.b

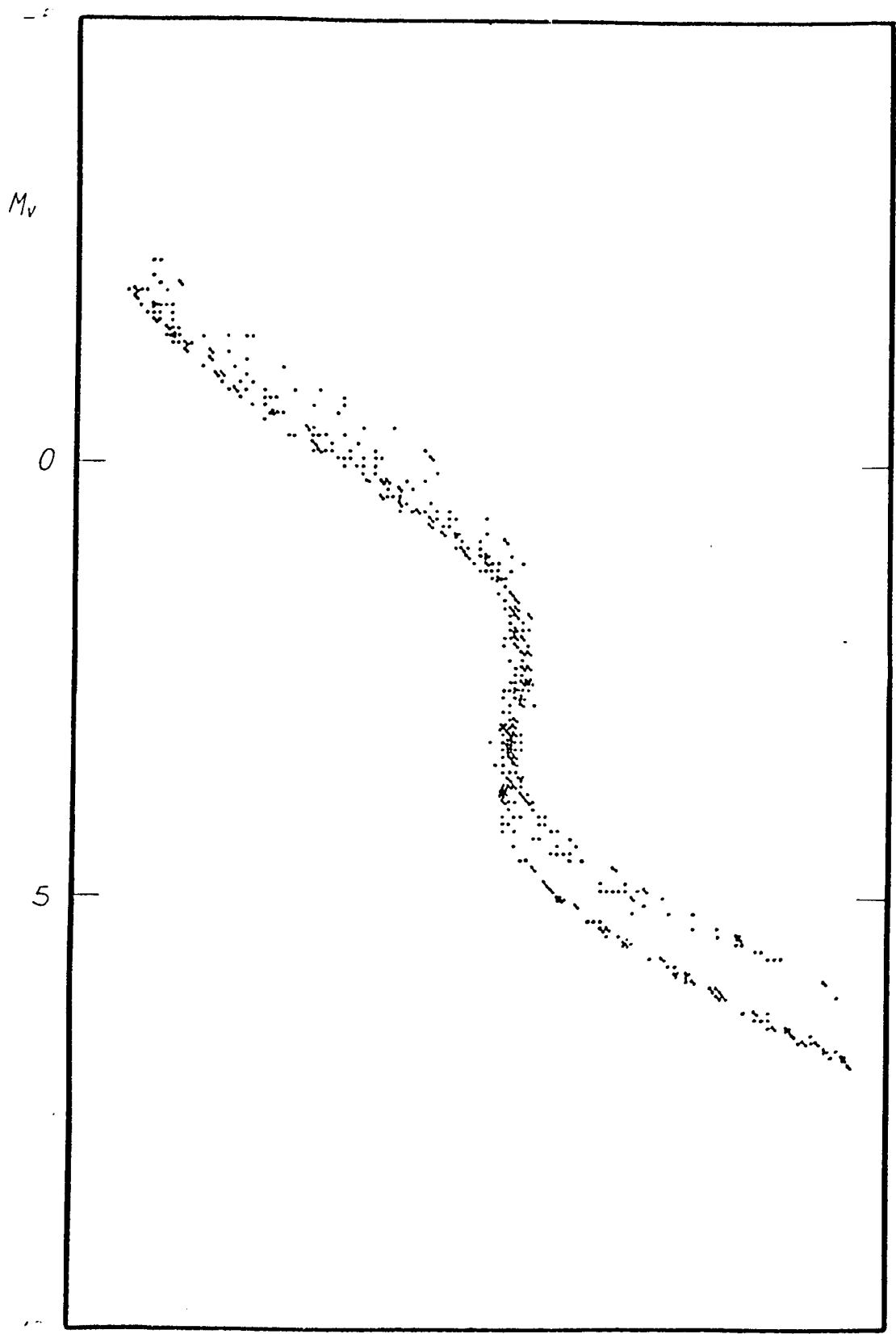


Figure IV.P2.c

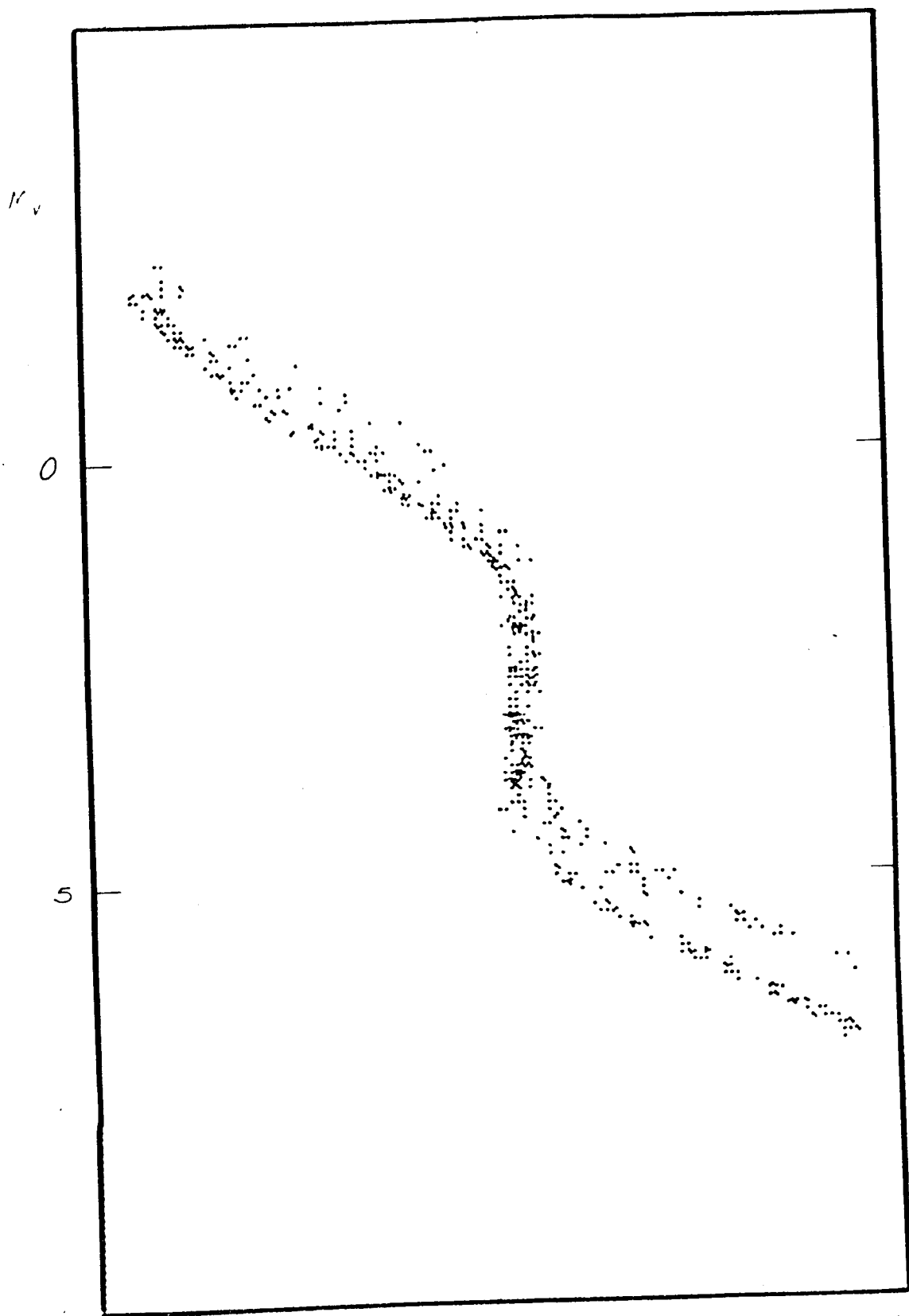


Figure IV.F2.d

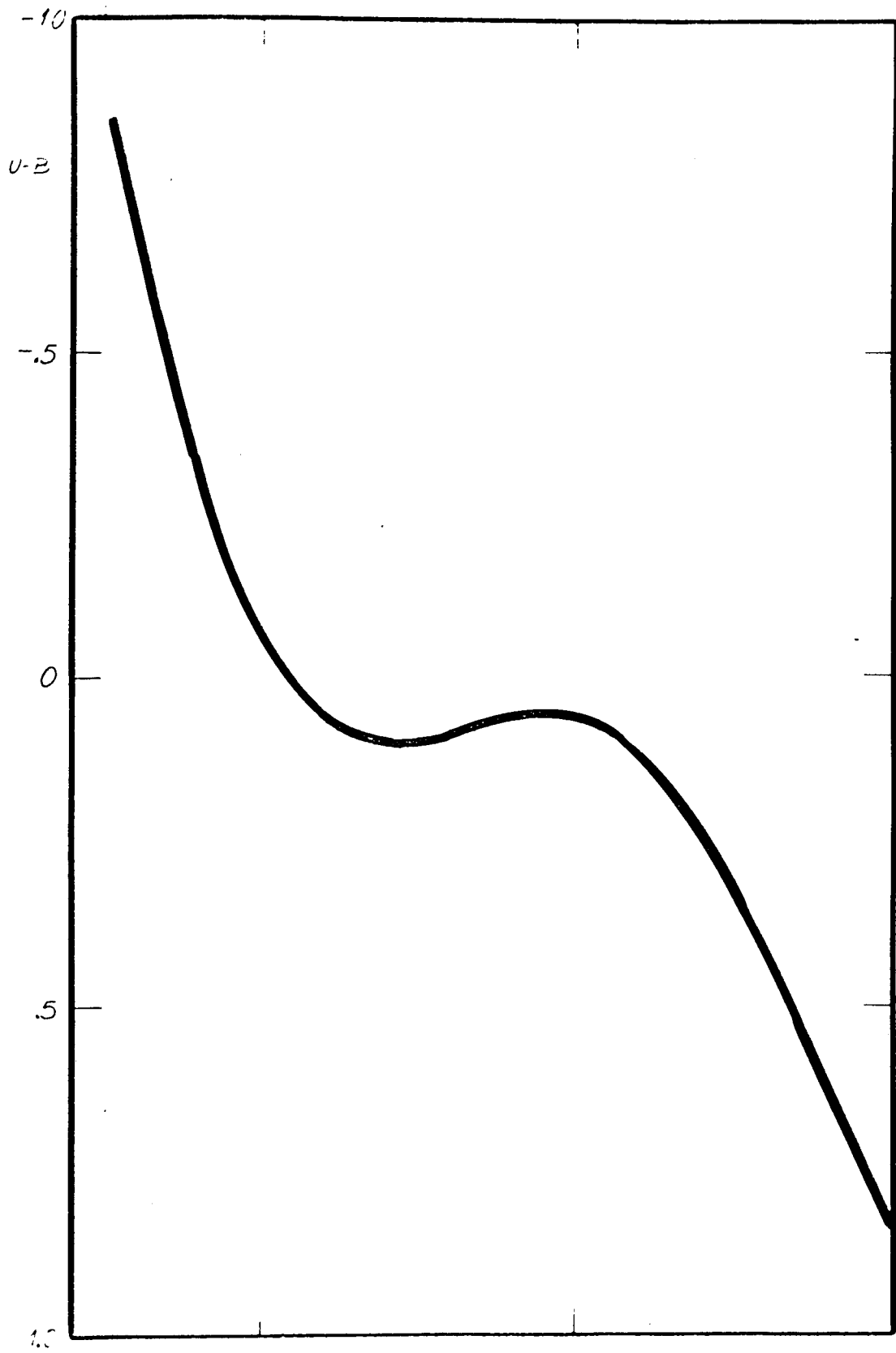


Figura IV.F3.a

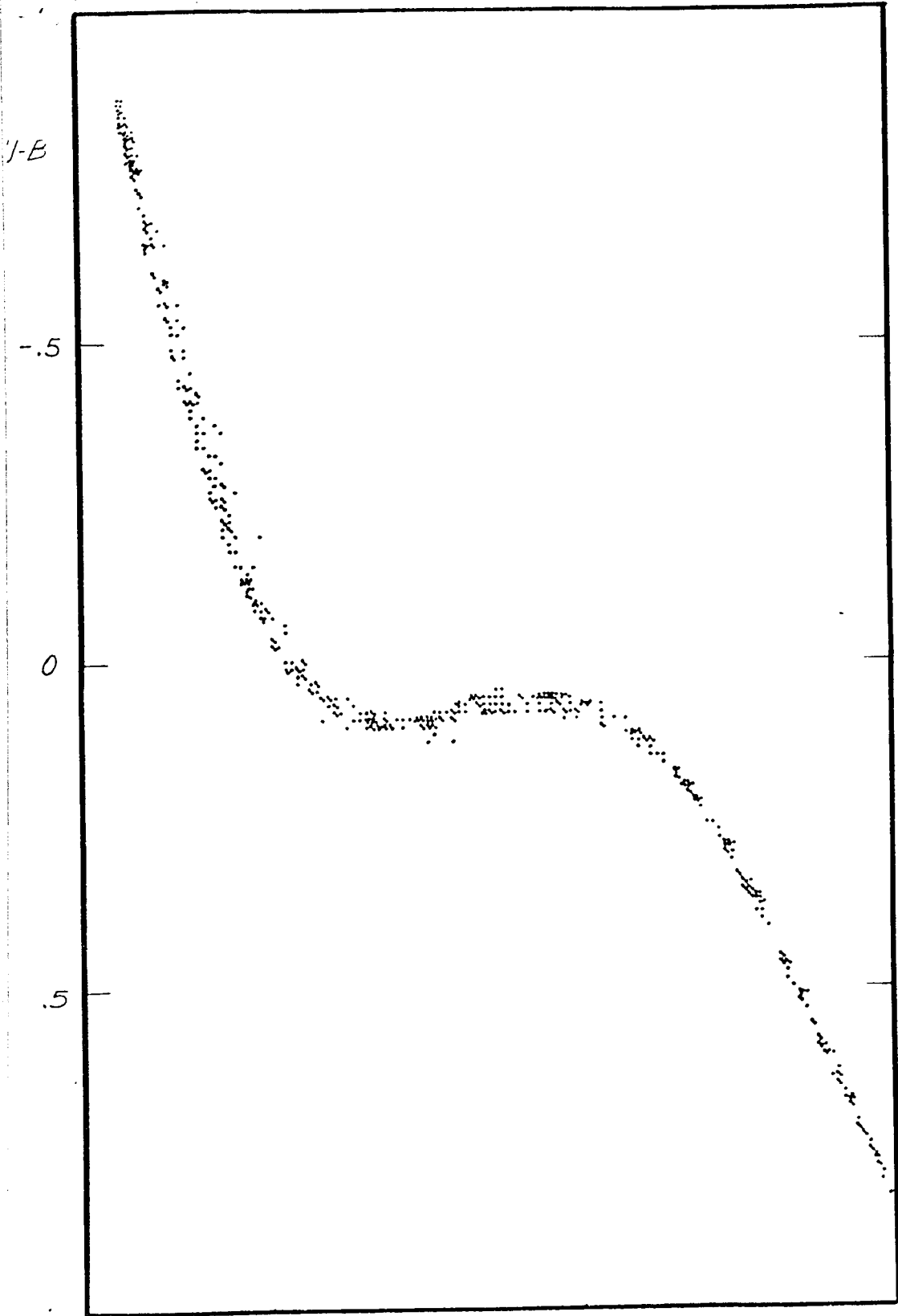


Figura IV.F3.b

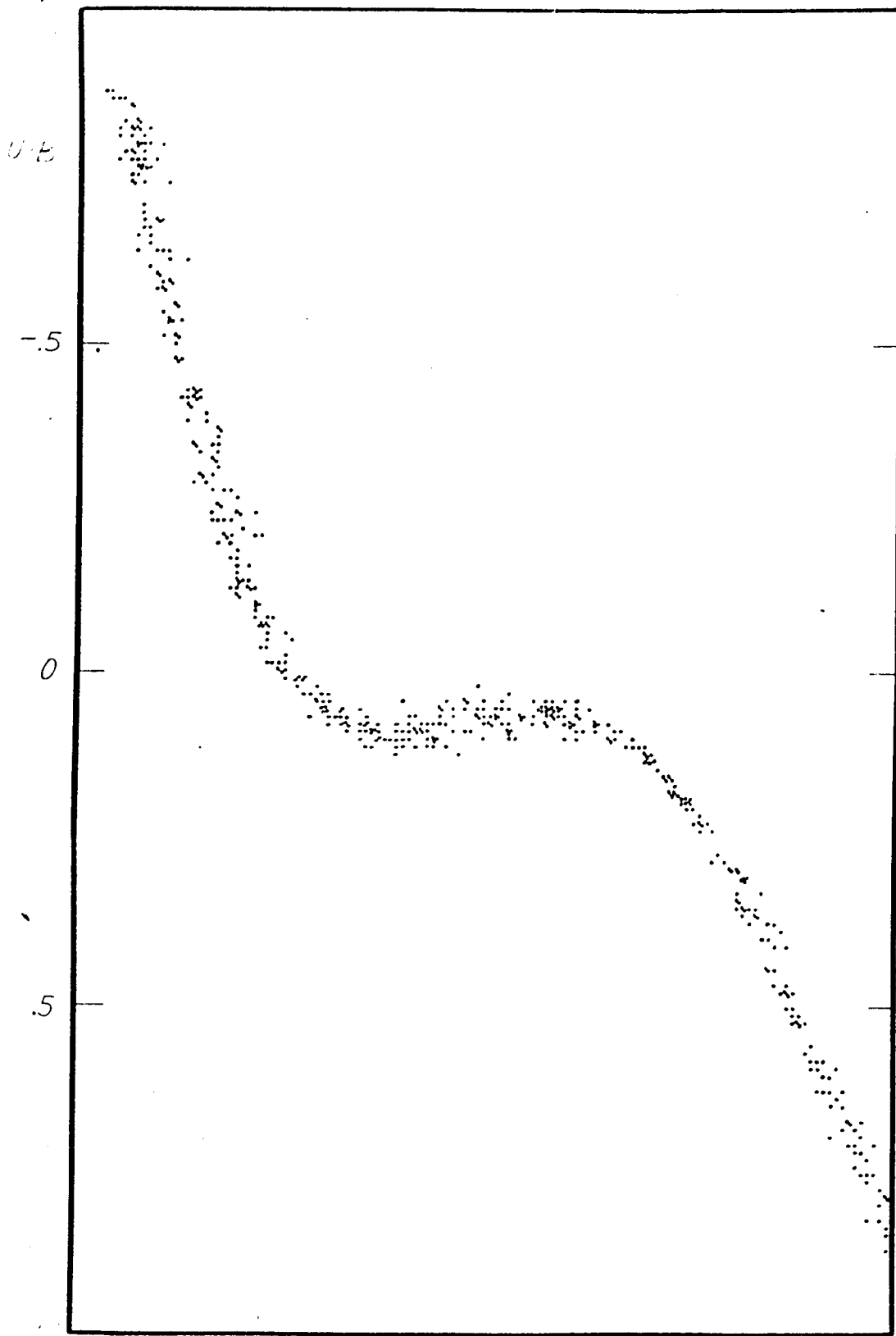


Figura IV.F3.c

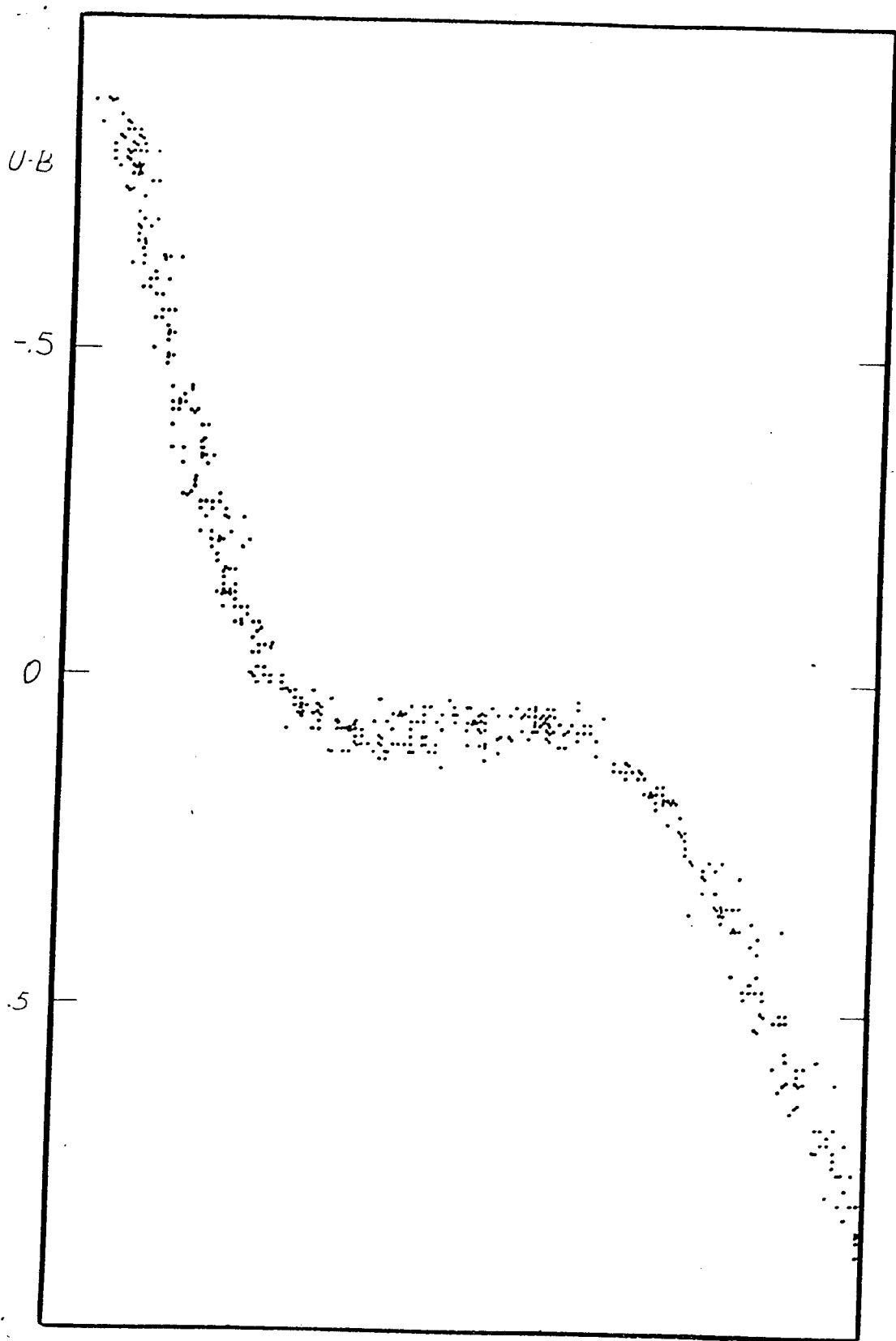


Figura IV.F3.d

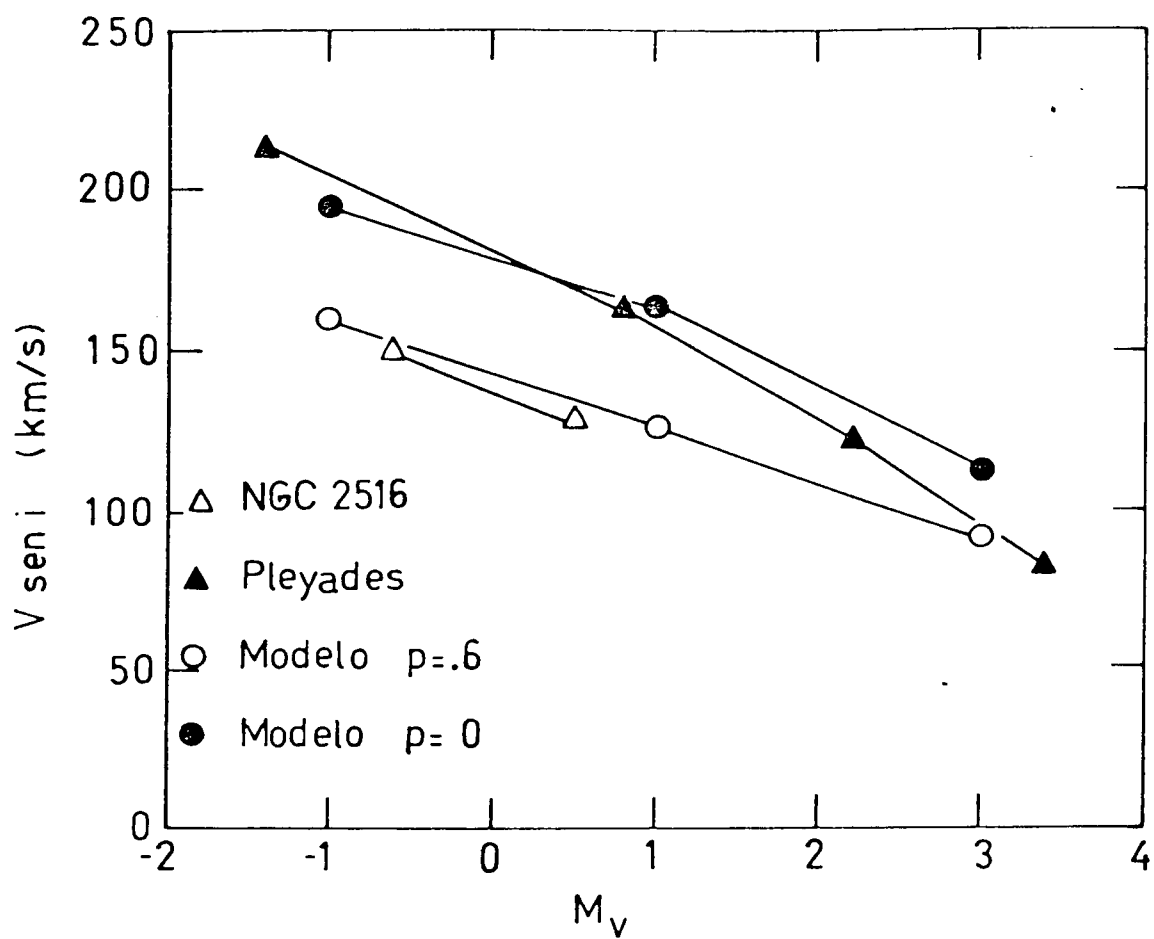


Figura IV.F4

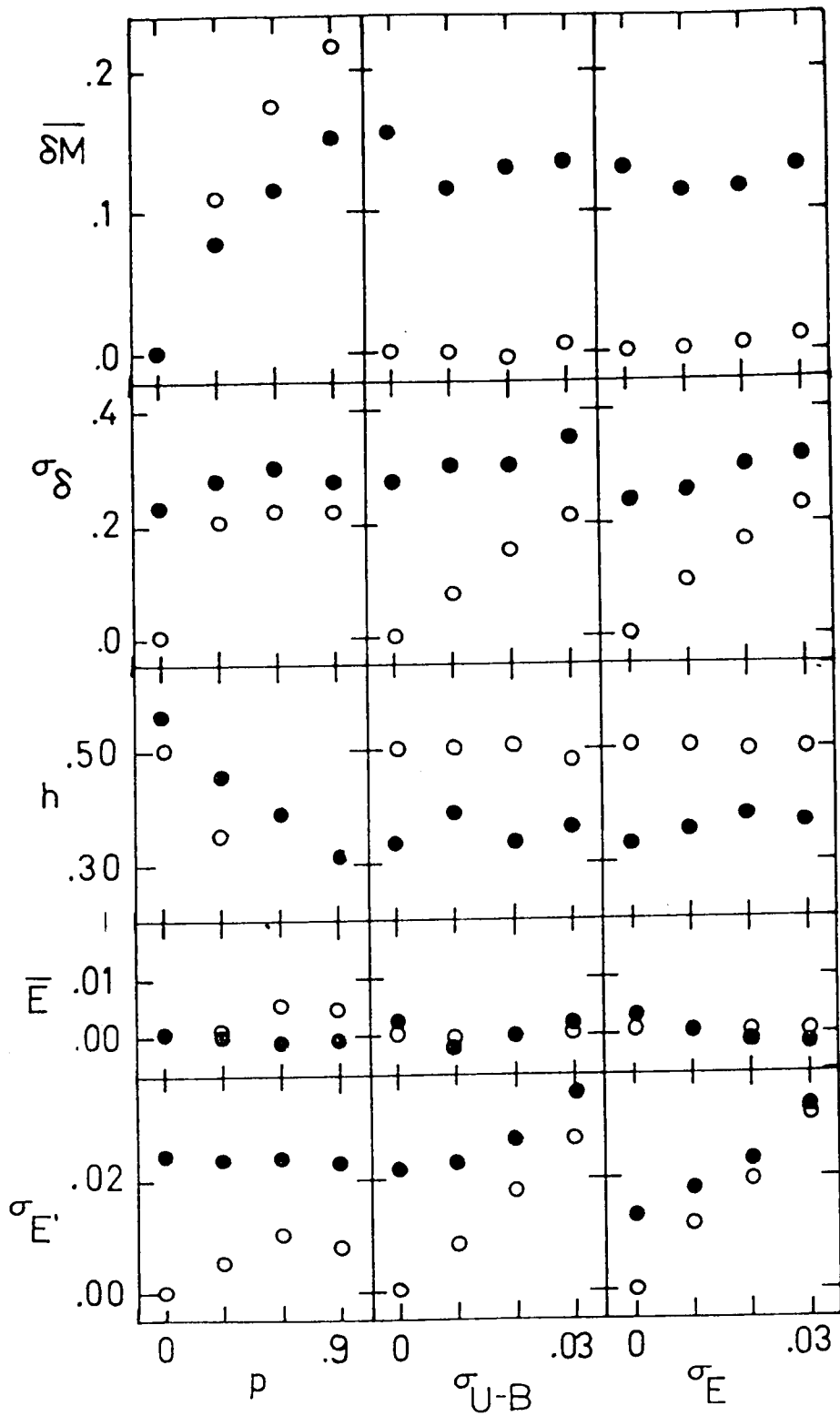


Figura IV.F5

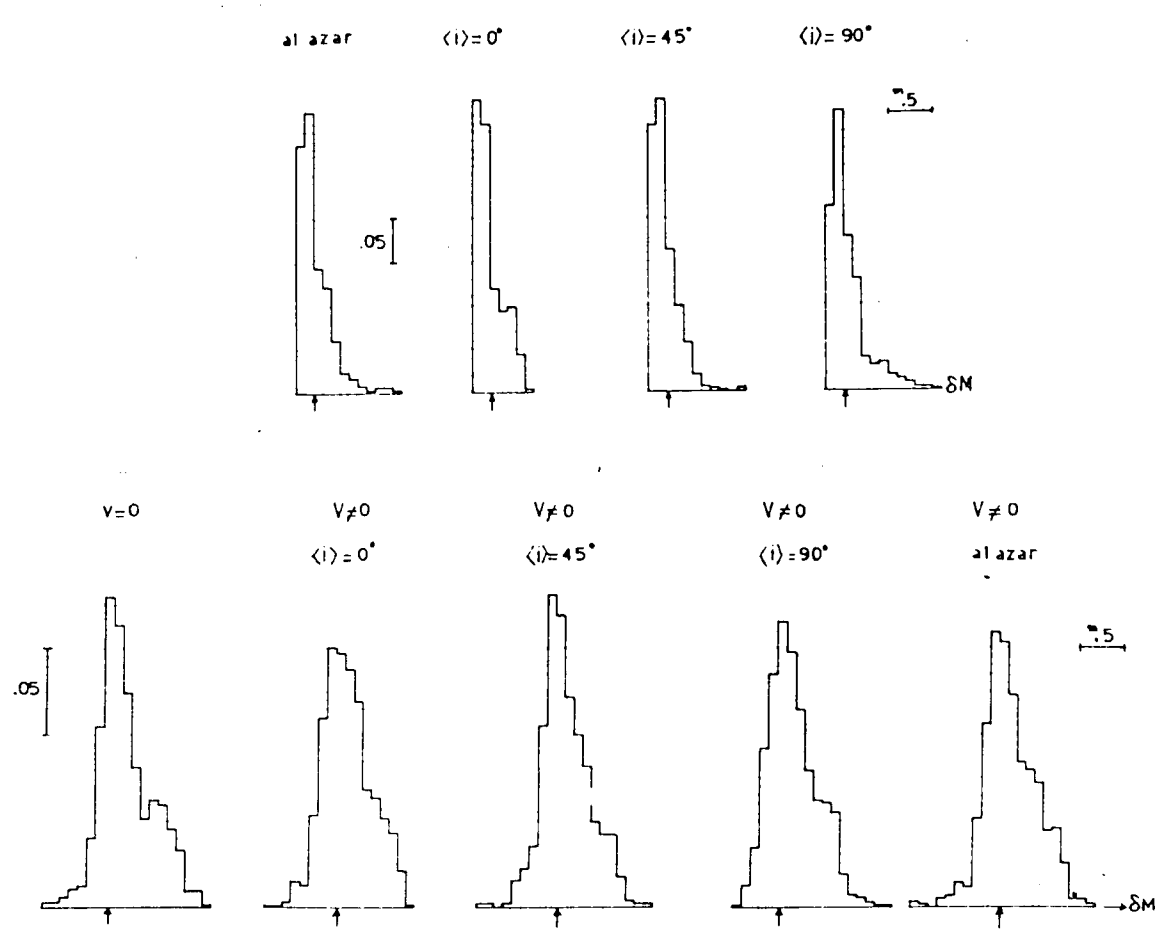


Figura IV.F6

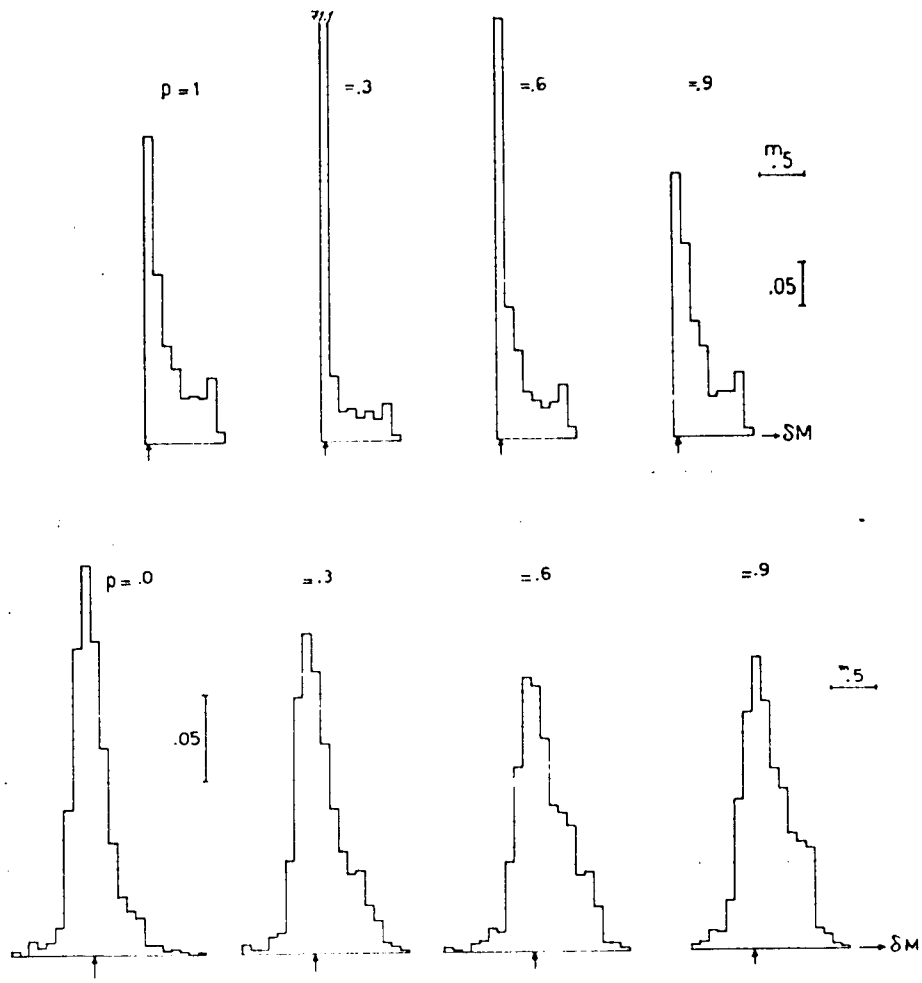


Figure IV.F7

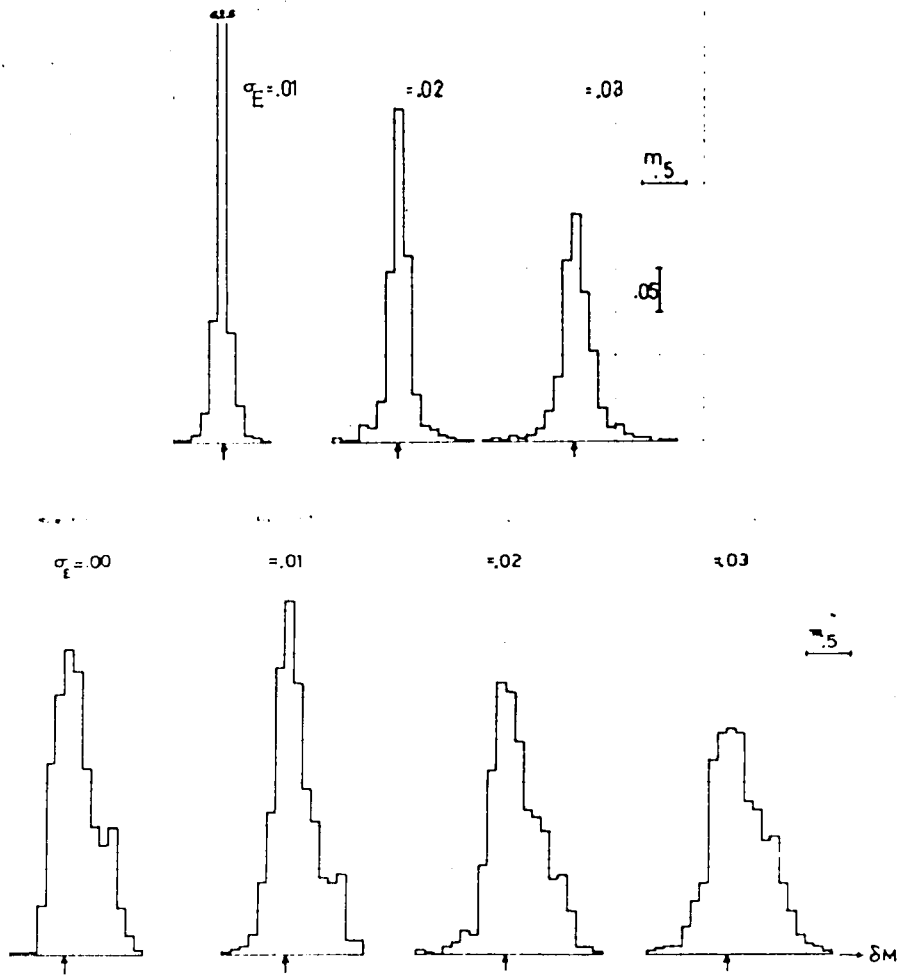
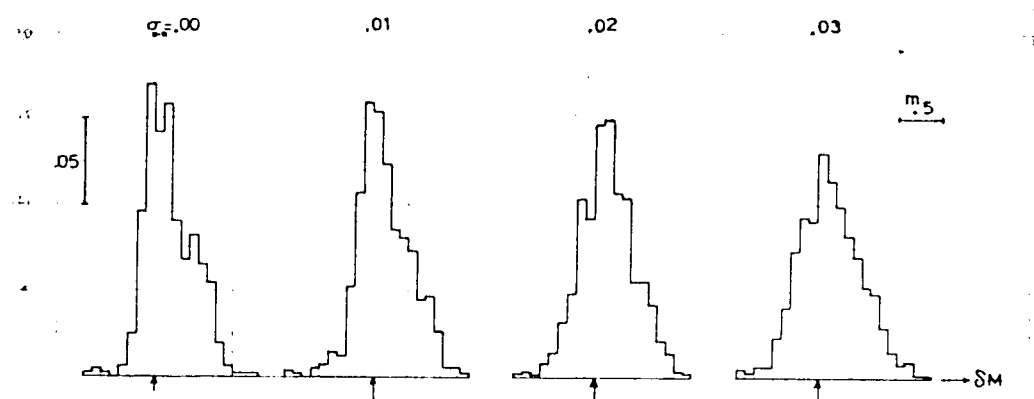
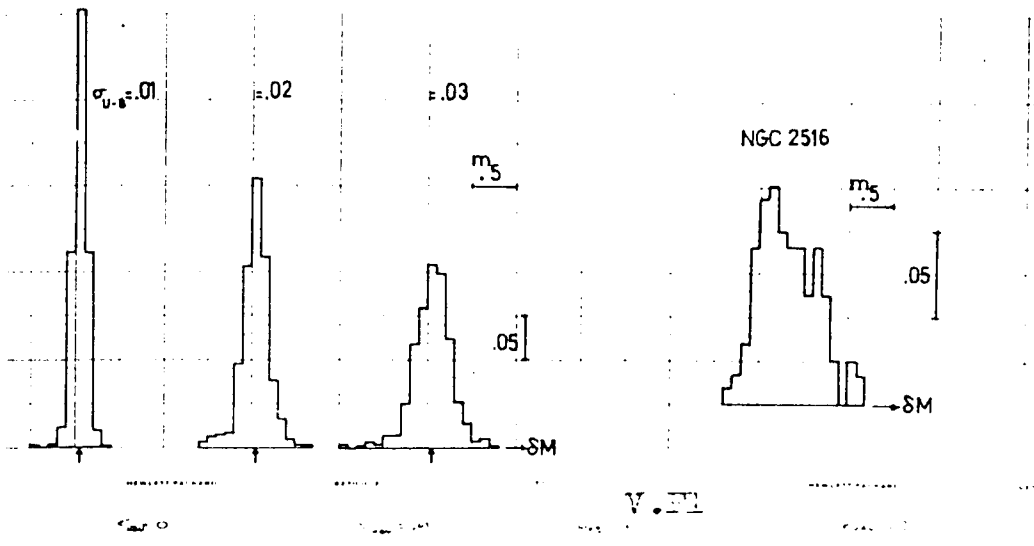


Figura IV.F8



Figuras IV.F9 y V.F1

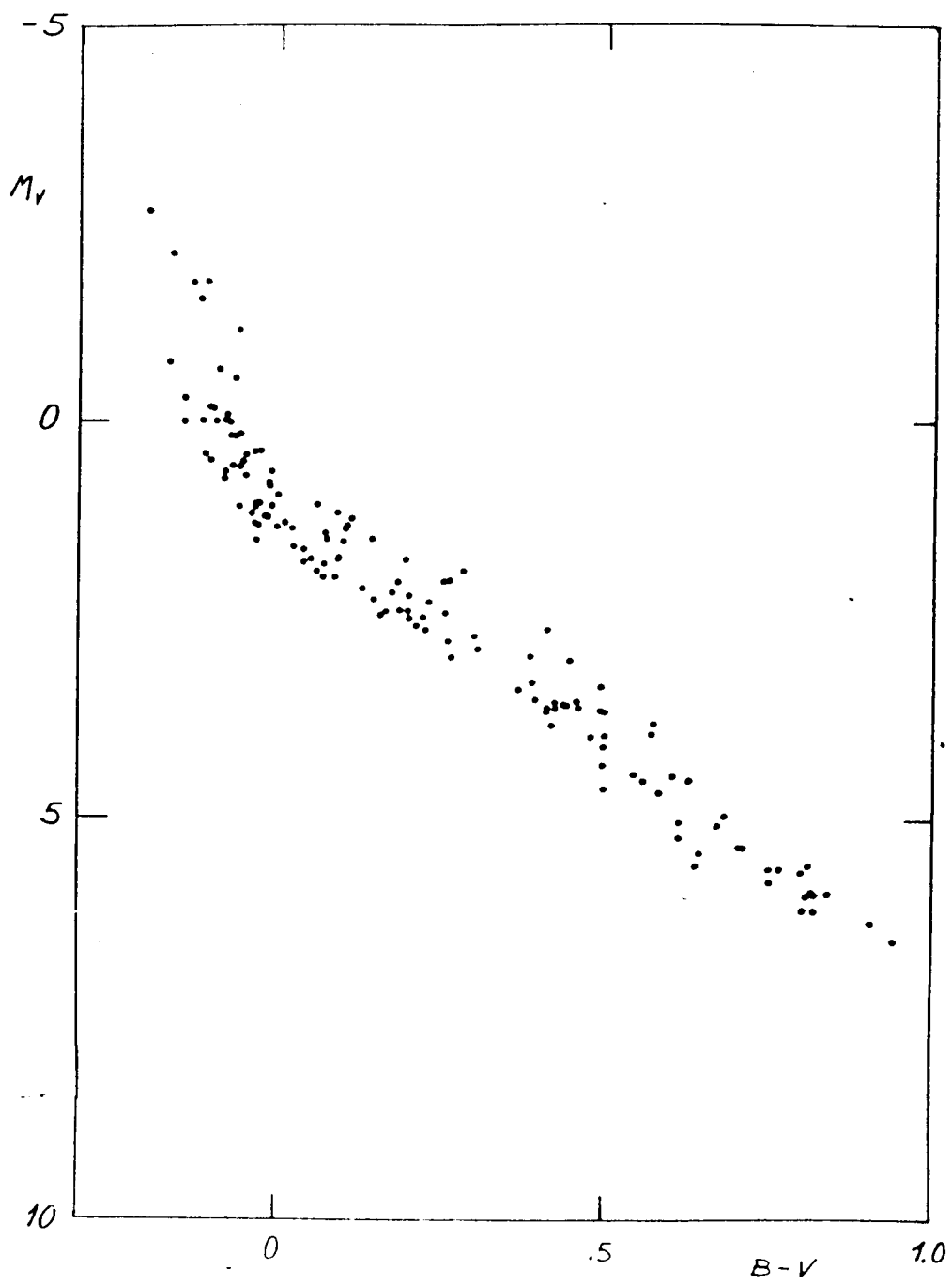


Figura V.F2

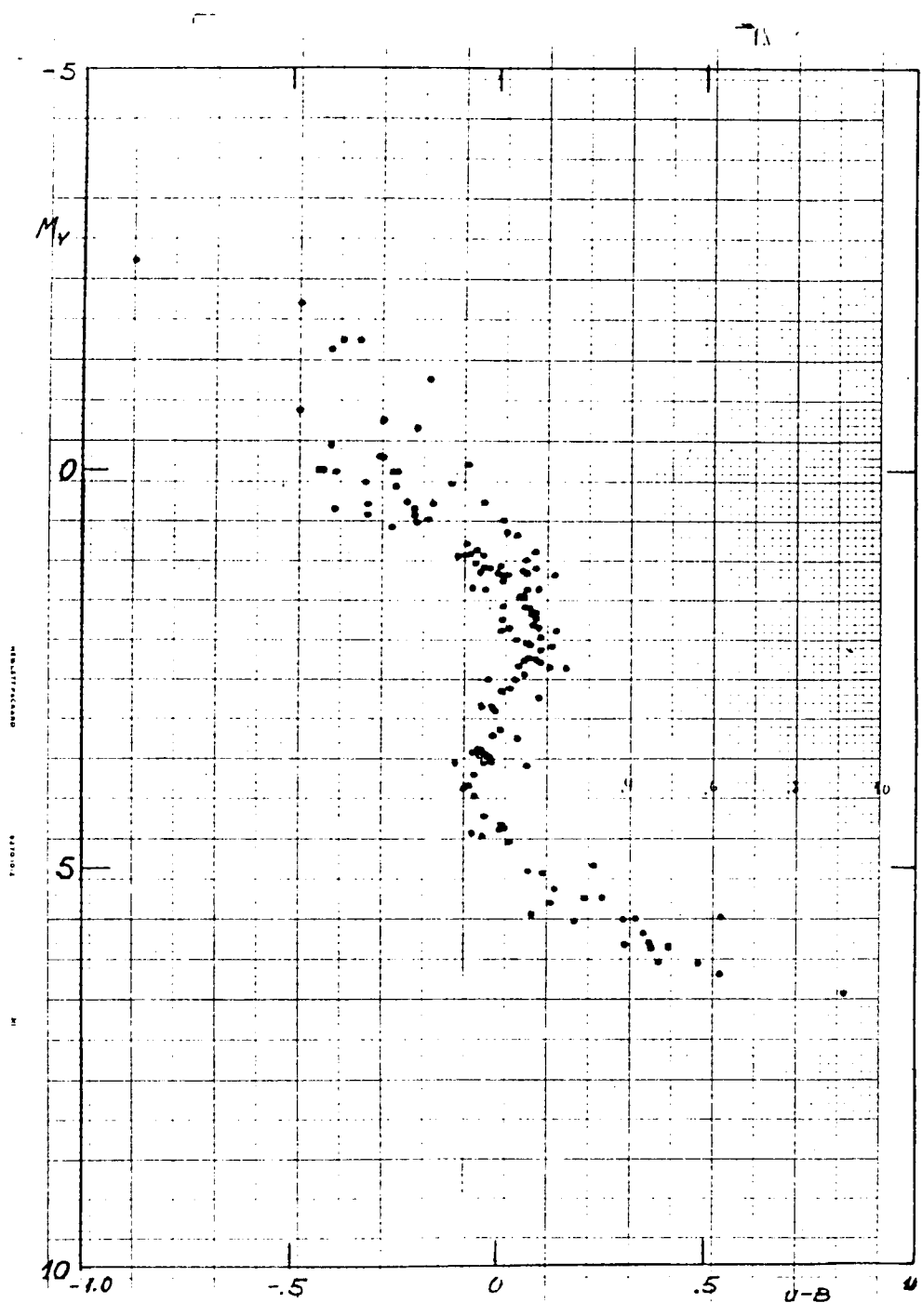


Figura V.F3

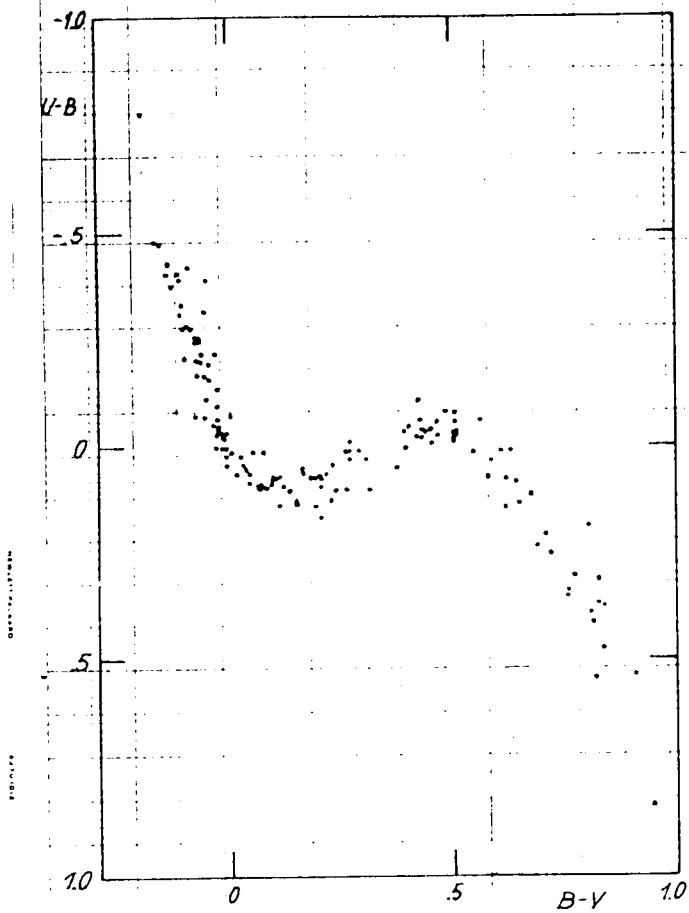


Figura V.F4